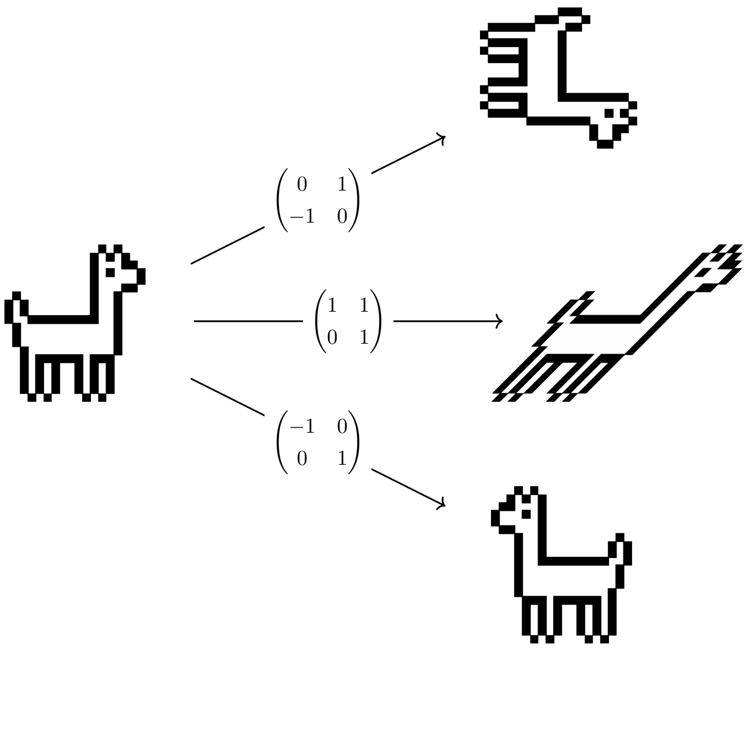
Álgebra III



Sebastián Barbieri

Índice general

Este apunte de Álgebra lineal fue escrito como soporte del curso Álgebra III de la Universidad de Santiago de Chile durante el segundo semestre del año 2020. A falta de una mejor manera de comunicar los contenidos de manera online, mucho material fue creado y finalmente compilado en este apunte.

Los contenidos de este apunte cubren en detalle los primeros cuatro capítulos de la malla curricular que puede encontrarse en `http://www.ingemat.usach.cl/images/ALGEBRA_III.pdf`. El primer capítulo se centra en recapitular conceptos básicos de espacios vectoriales y cálculo matricial.

El segundo capítulo tiene como objetivo el estudio de operadores. Es decir, de transformaciones lineales de un espacio vectorial en sí mismo. La primera parte del capítulo estudia la noción de diagonalización, en tanto que la segunda parte estudia la existencia de formas más generales, tales como formas triangulares o la forma canónica de Jordan.

El tercer capítulo estudia espacios vectores que han sido dotados de una estructura adicional geométrica llamada producto interno. Los contenidos son desarrollados en gran generalidad y se avocan a estudiar los llamados "teoremas espectrales" que permiten representar cierto tipo de operadores de manera muy sencilla en una base ortonormal.

El cuarto capítulo estudia en más detalle la representación matricial de las estructuras bilineares o sesquilineares sobre un espacio vectorial. Se estudiarán las condiciones matriciales que codifican propiedades sobre éstas estructuras. Finalmente se estudiarán las formas cuadráticas y se estudiará una aplicación de éstas a la clasificación de las secciones cónicas.

El quinto capítulo se centra en problemas reales que ocurren al intentar utilizar herramientas de álgebra lineal para resolver problemas con computador. Estudiaremos métodos que permiten minimizar errores y estimarlos.

Tan solo una pequeña parte de los contenidos de éste apunte son producción original del autor. La versión preliminar de este apunte se basa sobre unas notas de Leonardo Dinamarca. El capítulo 2 está ampliamente basado en los contenidos de [Lan87] y en menor medida en [Lay16]. Los capítulos 3 y 4 son reformulaciones de [HK71] y la mayor parte de los ejercicios fueron obtenidos de ahí. También hay influencia de contenidos de [Gre75] y [HJ17].

El lector debe tener en cuenta que probablemente resten muchos errores tipográficos en el apunte. Si encuentra algún error o desea mejorar el apunte, puede envíar un mensaje a

`sebastian.barbieri@usach.cl`

Capítulo 1

Preliminares

Repasaremos brevemente algunos conceptos básicos sobre matrices para fijar la notación.

Definición 1.0.1: Cuerpo

Un cuerpo $\mathbb{K}$ es un conjunto provisto de dos operaciones, la suma $+\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ y la multiplicación $\cdot\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ que satisfacen:

- $(\mathbb{K},+)$ es un grupo abeliano con neutro 0.
- $(\mathbb{K}\setminus\{0\},\cdot)$ es un grupo abeliano con neutro 1.
- $0\cdot a = 0$ para todo $a\in\mathbb{K}$.
- $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ para todo $a,b,c\in\mathbb{K}$.

Los cuerpos que consideraremos en este curso serán siempre $\mathbb{Q}$, el cuerpo de los números racionales, $\mathbb{R}$, el cuerpo de los números reales, y $\mathbb{C}$ el cuerpo de los números complejos. En el caso en que no queramos precisar el cuerpo en el que estamos trabajando tan solo lo denotaremos por $\mathbb{K}$ y asumiremos que es un cuerpo arbitrario.

Definición 1.0.2: Matriz

Una matriz de dimensiones m por n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, es un arreglo $A=(a_{i,j})_{1\le i\le m, 1\le j\le n}$ de valores en $\mathbb{K}$ que representamos como un arreglo 2-dimensional de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Dada una matriz A de dimensiones m por n y una matriz B de dimensiones n por ℓ, el producto de A y B es la matriz AB de dimensiones m por ℓ dada por

$$(AB)_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,j}b_{j,k} \text{ para todo } 1\le i\le m, 1\le k\le \ell.$$

Denotamos el conjunto de las matrices de dimensiones m por n sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ como $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. En el caso en que $m=n$, escribiremos simplemente $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notemos que en este caso la multiplicación define una operación entre elementos de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ que lo convierte en un monoide cuya identidad es la matriz identidad I que consiste de 1 en la diagonal y 0 fuera de ella.

Denotaremos el subconjunto de matrices invertibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ como $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, el cual forma un grupo con la operación de multiplicación de matrices que se denomina **grupo general lineal**.

Asumiremos que el lector ya conoce operaciones matriciales elementales como el método de pivotes de Gauss, así como su aplicación para resolver sistemas lineales de ecuaciones.

Definición 1.0.3: Determinante

Dada una matriz $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, su determinante se define de manera inductiva como sigue:

- Si $n = 1$, $\det(A) = a_{1,1}$.
- Si $n > 1$
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{1,i}(-1)^{i+1} \det([A]_{1,i}).$$
Donde $[A]_{1,i}$ denota la matriz que resulta al quitar la fila 1 y la columna i de A.

Recordemos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es invertible, si y solamente si $\det(A) \neq 0$.

1.1. Espacios vectoriales

Definición 1.1.1: Espacio vectorial

Un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ es un grupo abeliano $(E, +)$ junto con un producto escalar $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ que satisface:

- $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$, para todo $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$ y $x \in E$.
- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y \in E$.
- $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x$, para todo $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$ y $x \in E$.
- $1x = x$, para todo $x \in E$.

Nos enfocaremos mayoritariamente en el caso donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si no especificamos el cuerpo sobre el cual está definido un espacio vectorial, asumiremos por defecto que es $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.1.2

El espacio $E = \mathbb{R}^n$ que consiste de tuplas de elementos en $\mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ con

- la suma dada por
$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$
para todo $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
- la multiplicación por escalar dada por
$$c \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (cx_1, \ldots, cx_n),$$
para todo $c \in \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.1.3

El espacio $E = \mathbb{R}[x]$ de polinomios a variable real con coeficientes reales, con la suma de funciones y la multiplicación por escalar usual, es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

El objeto de estudio del álgebra lineal es un tipo especial de función entre espacios vectoriales llamada transformación lineal.

Definición 1.1.4: Transformación lineal

Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una función $T\colon E \to F$ es **lineal** si satisface que para todo $a, b \in \mathbb{K}$ y todo $x, y \in E$,

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y).$$

Observación 1.1. A las funciones lineales se les dice también "transformaciones lineales". En el caso en que el espacio de llegada y de partida sean el mismo, se les llama "operadores".

Ejemplo 1.1.5

Para cada matriz $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ la aplicación $T_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por

$$[T_A(x_1, \ldots, x_n)]_i = [Ax]_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j, \text{ para } 1 \leq i \leq m,$$

es una función lineal. De hecho, toda función lineal entre estos espacios puede representarse de esta forma.

Ejemplo 1.1.6

Sea $E = C([0,1], \mathbb{R})$ el espacio vectorial de funciones continuas de $[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$. La función $T\colon E \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(f) = \int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x,$$

es lineal.

Ejemplo 1.1.7

Sea $E = C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de funciones diferenciables de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Para todo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, denotamos $\nabla(f)$ el gradiente de f. La función $T_{x_0}\colon E \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$T_{x_0}(f) = \nabla(f)(x_0),$$

es lineal.

Observación 1.2. Si fijamos una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, el gradiente $\nabla(f)(x)$ como función de $\mathbb{R}^n$ no es una transformación lineal, sin embargo el ejemplo anterior muestra que el gradiente en un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ como función de la función diferenciable sí es una transformación lineal.

Los Ejemplos 1.1.3, 1.1.6 and 1.1.7 muestran en espacios vectoriales que no pueden identificarse con $\mathbb{R}^n$ para ningún $n \geq 1$. Lo anterior ocurre debido a que no es posible describirlos con una cantidad finita de coordenadas, es decir, no son de "dimensión finita". En general, en este curso nos interesaremos principalmente en transformaciones que pueden identificarse con $\mathbb{R}^n$. Para ello necesitamos recordar algunos conceptos.

Definición 1.1.8: Base

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Decimos que un conjunto B es:

- **Linealmente independiente** si para todo $n \in \mathbb{N}$, $b_1, \dots, b_n \in B$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tenemos que
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = 0 \implies a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$
- **Generador**, si para todo $x \in E$ existen $b_1, \dots, b_n \in B$ y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ tales que
$$x = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n.$$
- **Base** si es generador y linealmente independiente.

De manera equivalente, un conjunto es linealmente independiente si ninguno de sus elementos puede escribirse como combinación lineal de otros elementos. Un conjunto es generador si todo elemento del espacio puede escribirse como combinación lineal de elementos él. En una base, la propiedad interesante es que todo elemento de E puede escribirse de manera única como combinación lineal de elementos de la base.

Ejemplo 1.1.9

El conjunto $B = \{e_i\}_{i \in \{1,\dots,n\}}$ donde
$$(e_i)_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases},$$
es una base de $\mathbb{R}^n$. Esta base se denomina **base canónica** y sus elementos **vectores canónicos**.

Por linealidad, toda transformación lineal T de un espacio E en otro espacio F está completamente definida por la restricción de T a cualquier base de E. Conversamente, dada una función de una base de E en T, existe una única transformación lineal cuya restricción a la base tiene los mismos valores.

Definición 1.1.10: Dimensión

La **dimensión** de un espacio E es la cardinalidad de una base de B. Si existe una base finita de E diremos que la dimensión $\dim(E)$ de E es la cantidad de elementos de esa base. Si no existe una base finita de E, decimos que E tiene **dimensión infinita**.

En este curso nos enfocaremos en espacios vectoriales de dimensión finita. Uno de los resultados del curso anterior es que la dimensión de un espacio que admite una base finita está bien definida, es decir, todas las bases tienen la misma cardinalidad.

Observación 1.3. Es posible demostrar que incluso en un espacio vectorial de dimensión infinita todas las bases tienen la misma cardinalidad. Este es un resultado que va más allá de los contenidos de este curso y que depende del axioma de elección.

Todos los espacios vectoriales de dimensión n sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ pueden identificarse con $\mathbb{K}^d$ mediante la transformación lineal que envía los elementos de su base a la base canónica de $\mathbb{K}^d$.

Definición 1.1.11: Núcleo, imagen, nulidad y rango

Sea $T\colon E \to F$ una transformación lineal entre espacios vectoriales E, F sobre $\mathbb{K}$.

- El núcleo de T es el espacio vectorial
$$\mathrm{Ker}(T) = \{x \in E \colon T(x) = 0_F.\}.$$
- La imagen de T es el espacio vectorial
$$\mathrm{Im}(T) = \{y \in F \colon T(x) = y \text{ para algún } x \in E\}.$$
- La nulidad de T es la dimensión de su núcleo
$$\mathrm{Nul}(T) = \dim(\mathrm{Ker}(T)).$$
- El rango de T es la dimensión de su imagen
$$\mathrm{Rango}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

Ejercicio 1.1.12

Sea $T_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal determinada por la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Determine su núcleo, su imagen, su rango y su nulidad.

1.2. Isomorfisos de espacios vectoriales

Una noción importante en matemática es la de **isomorfismo**. De manera informal, un isomorfismo entre dos objetos de un mismo tipo (conjuntos, espacios vectoriales, grupos, anillos, etc.) es una función que "preserva las propiedades estructurales del objeto". Cuando existe un isomorfismo entre dos objetos de un mismo tipo, decimos que son **isomorfos** y se suele denotar mediante el símbolo $\cong$.

Observación 1.4. La palabra isomorfismo viene del griego antiguo y significa "misma forma". En palabras coloquiales, si tengo dos objetos que son isomorfos, entonces son "el mismo mono, pero pintados de color distinto".

Ejemplo 1.2.1: Isomorfismo en conjuntos

Cuando consideramos conjuntos (sin estructura adicional) la única propiedad importante es la cantidad de elementos. Luego la noción de isomorfismo para conjuntos es la biyección.

Ejemplo 1.2.2: Isomorfismo en grupos

Si $(G, \star)$ y $(H, *)$ son grupos, entonces la noción de isomorfismo es la de un homomorfismo biyectivo. Es decir, una función $\varphi\colon G \to H$ es un isomorfismo si cumple:

1. φ es biyectiva.
2. φ es un homomorfismo, es decir para todo $g, g' \in G$ cumple que $\varphi(g \star g') = \varphi(g) * \varphi(g')$.

Ejercicio 1.2.3

Supongamos que $(G, \star)$ y $(H, *)$ son grupos isomorfos. Muestre que $(G, \star)$ es abeliano si y solamente si $(H, *)$ es abeliano.

Observación 1.5. La noción de isomorfismo depende del objeto que consideremos y debe ser definida en función de lo que se desee preservar.

El objetivo de hoy será introducir una noción de isomorfismo entre espacios vectoriales. Para definirlo hay que preguntarse primero qué propiedades de un espacio vectorial debería preservar un isomorfismo. En lo que sigue daremos una seguidilla de propiedades deseables y luego definiremos una noción que las cumplirá.

Supongamos que E, F son dos espacios vectoriales (sobre $\mathbb{R}$) y $\varphi\colon E \to F$ es una función. Las siguientes propiedades de φ serían deseables en un isomorfismo:

1. φ es biyectiva, y su inversa es también un isomorfismo.
2. φ debe preservar la estructura de espacio vectorial:
   - $\varphi(x +_E y) = \varphi(x) +_F \varphi(y)$. Para todo $x, y \in E$.
   - $\varphi(c \cdot_E x) = c \cdot_F \varphi(x)$. Para todo $c \in \mathbb{R}$ y $x \in E$.
3. Si S es un conjunto linealmente independiente de E, entonces
$$\varphi(S) = \{\varphi(s) : s \in S\},$$
es un conjunto linealmente independiente de F.
4. Si S es un conjunto generador de E, entonces $\varphi(S)$ es un conjunto generador de F.
5. Si B es una base de E, entonces $\varphi(S)$ es una base de F.
6. Si $E_1 \subseteq E$ es un subespacio de E, entonces $\varphi(E_1)$ es un subespacio de F.

La lista de propiedades deseables para un isomorfismo se puede extender aún más (Como ejercicio, puede mostrar que las propiedades 1. y 2. implican el resto). A continuación definiremos una noción de isomorfismo que satisface estas propiedades.

Definición 1.2.4: Isomorfismo de espacios vectoriales

Un **isomorfismo** entre dos espacios vectoriales E, F es una transformación lineal $\varphi\colon E \to F$ biyectiva.

Ejercicio 1.2.5

Sea φ un isomorfismo entre dos espacios vectoriales E y F. Muestre que las propiedades enunciadas anteriormente se cumplen.

Ejercicio 1.2.6

Considere $E = \mathbb{C}$ el espacio de los números complejos como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Muestre que E es isomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Observemos que el isomorfismo de espacios vectoriales (y en general, cualquier buena noción de isomorfismo) cumple las propiedades siguientes:

1. E es isomorfo a E (mediante la identidad).

2. Si E es isomorfo a F, entonces F es isomorfo a E, ya que la inversa de una función lineal biyectiva es una función lineal biyectiva.
3. Si E y F son espacios vectoriales isomorfos, y también F y G son espacios vectoriales isomorfos, entonces E y G también lo son, basta componer los isomorfismos.

En consecuencia, la noción de isomorfismo induce una relación de equivalencia en la clase de espacios vectoriales. De este modo, se puede hablar de un espacio vectorial "modulo isomorfismo".

En lo que sigue mostraremos que si nos interesamos en la clase de espacios vectoriales que son isomorfos entre sí, entonces existe un único espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n. En otras palabras, en la relación de isomorfismo, existe una única clase de equivalencia que contiene todos los espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n.

Proposición 1.2.7: Caracterización de espacios vectoriales de dimensión finita

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Entonces E es isomorfo a $\mathbb{K}^n$.

Demostración. Como E es un espacio vectorial de dimensión n, entonces existe una base $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ con n elementos. Luego todo elemento $x \in E$ puede escribirse de manera única como combinación lineal de elementos en B, es decir existen coeficientes únicos $a_1(x), \ldots, a_n(x) \in \mathbb{K}$ tales que

$$x = a_1(x)b_1 + \cdots + a_n(x)b.$$

Definamos una transformación lineal $T\colon E \to \mathbb{K}^n$ tal que $T(b_i) = e_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es decir, para $x \in E$ tenemos que

$$T(x) = T(a_1(x)b_1 + \cdots + a_n(x)b_n) = a_1(x)T(b_1) + \ldots a_n(x)T(b_n) = (a_1(x), \ldots, a_n(x)) \in \mathbb{K}^n.$$

Por definición T es una transformación lineal.

Para ver que T es inyectiva basta demostrar que $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$. En efecto, si $T(x) = 0$ entonces $a_i(x) = 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, luego $x = 0$.

T es sobreyectiva pues dado $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n$ basta tomar $x = c_1b_1 + \ldots c_nb_n$ y tendremos que $T(x) = (c_1, \ldots, c_n)$. □

La noción de isomorfismo permite comprender cualquier espacio mirando un representante "amigable" de su clase de equivalencia. En el caso de espacios vectoriales, el representante amigable es $\mathbb{K}^n$, luego podemos estudiar las propiedades de un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K}$ tan solo estudiando las propiedades de $\mathbb{K}^n$.

Definición 1.2.8: Espacio de transformaciones lineales

Sean E, F espacios vectoriales de dimensión finita, denotamos $\mathcal{L}(E, F)$ el espacio de las funciones lineales de E en F.

$$\mathcal{L}(E, F) = \{T\colon E \to F, T \text{ es lineal }\}.$$

El conjunto $\mathcal{L}(E, F)$ es en si mismo también un espacio vectorial con la suma de funciones y la multiplicación por escalar.

Ejercicio 1.2.9

Sean $n, m \geq 1$. Muestre que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es isomorfo al espacio vectorial $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, donde $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ denota el espacio de matrices de m filas y n columnas a coeficientes en $\mathbb{R}$ y sus operaciones son la suma coordenada a coordenada, y la multiplicación por escalar usuales.

Proposición 1.2.10: El isomorfismo se extiende a transformaciones lineales

Sean E, F y W tres espacios vectoriales.

1. Si E y F son isomorfos entonces $\mathcal{L}(E, W)$ y $\mathcal{L}(F, W)$ son isomorfos.
2. Si F y W son isomorfos entonces $\mathcal{L}(E, F)$ y $\mathcal{L}(E, W)$ son isomorfos.

Demostración. Sea φ un isomorfismo entre E y F. Como φ es una transformación lineal biyectiva, entonces φ^{-1} existe y es lineal. Consideremos la aplicación $\phi\colon \mathcal{L}(E, W) \to \mathcal{L}(F, W)$ dada por

$$\phi(T) = T \circ \varphi^{-1}.$$

Luego $\phi(T)$ es una transformación lineal en $\mathcal{L}(F, W)$ para todo $T \in \mathcal{L}(E, W)$.

Mostremos que ϕ es lineal. En efecto, sean $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ y $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, W)$. Para todo $y \in F$ tenemos que si

$$\begin{aligned}\phi(a_1T_1 + a_2T_2)(y) &= (a_1T_1 + a_2T_2)(\varphi^{-1}(y)) \\ &= a_1T_1(\varphi^{-1}(y)) + a_2T_2(\varphi^{-1}(y)) \\ &= a_1\phi(T_1)(y) + a_2\phi(T_2)(y).\end{aligned}$$

Luego $\phi(a_1T_1 + a_2T_2) = a_1\phi(T_1) + a_2\phi(T_2)$, por lo cual concluimos que ϕ es lineal.

Para ver que ϕ es inyectiva, basta ver que su núcleo es 0. En efecto, si $\phi(T) = 0$, entonces $T \circ \varphi^{-1}$ es cero. Como φ^{-1} envía elementos de una base de F en una base de E, entonces T se anula en la base de E, por lo cual $T = 0$. Luego $\operatorname{Ker}(\phi) = 0$.

Para ver que es sobreyectiva, sea $L \in \mathcal{L}(F, W)$ y conideremos $T = L \circ \varphi$. Luego $T \in \mathcal{L}(E, W)$ y se tiene que

$$\phi(T) = T \circ \varphi^{-1} = (L \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = L.$$

Luego ϕ es sobreyectiva. Concluimos que ϕ es un isomorfismo entre $\mathcal{L}(E, W)$ y $\mathcal{L}(F, W)$.

Para demostrar el punto 2 se hace exactamente lo mismo, pero se considera ahora un isomorfismo $\varphi'\colon F \to W$ y la aplicación $\phi'\colon \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(E, W)$ dada por

$$\phi'(T) = \varphi \circ T.$$

□

Ejercicio 1.2.11

Complete la segunda parte de la prueba anterior. Es decir, muestre que ϕ' es una función biyectiva y lineal entre $\mathcal{L}(E, F)$ y $\mathcal{L}(E, W)$

La proposición anterior permite mostrar el siguiente corolario.

Corolario 1.2.12: Caracterización modulo isormfismo de transformaciones lineales

Sean E, F dos espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ tal que $\dim(E) = n$ y $\dim(F) = m$ para $n, m \geq 1$. Entonces

$$\mathcal{L}(E, F) \text{ es isomorfo a } \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m).$$

Demostración. Por la Proposición 1.2.7, tenemos que E es isomorfo a $\mathbb{K}^n$ y F es isomorfo a $\mathbb{K}^m$. Utilizando la segunda de estas relaciones y la Proposición 1.2.10 parte 1, obtenemos que $\mathcal{L}(E, F)$ es isomorfo a $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}^m)$. Utilizando la primera de las relaciones y la Proposición 1.2.10 parte 2, obtenemos que $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}^m)$ es isomorfo a $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. □

Ya sabemos que el espacio $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ es a su vez isomorfo a $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, el resultado anterior nos dice que las transformaciones lineales entre dos espacios vectoriales de dimensión finita siempre pueden pensarse como matrices!

1.3. Teorema de rango-nulidad

Hoy demostraremos un teorema que relaciona la nulidad de una transformación lineal, su rango y la dimensión del espacio de partida. Para ello, mostraremos primero un resultado auxliliar.

Lema 1.3.1: Extensión de conjuntos linealmente independientes a bases

Sea E un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\{a_1, \ldots, a_k\}$ es un conjunto linealmente independiente y que B es una base de E.
Entonces $k \leq n$ y existen $n-k$ elementos $b_{k+1}, \ldots, b_n \in B$ tales que

$$\{a_1, \ldots, a_k\} \cup \{b_{k+1}, \ldots, b_n\} \text{ es una base de } E.$$

Demostración. El hecho de que $k \leq n$ es directo ya que $\{a_1, \ldots, a_k\}$ es un conjunto linealmente independiente. Procedamos por inducción en k. El caso $k = 0$ es evidente pues podemos tomar $\{b_1, \ldots, b_n\} = B$ que es una base por hipótesis.

Sea $k \geq 1$ y supongamos que el resultado es cierto para $k-1$. Luego existen elementos $b_k, \ldots, b_n \in B$ tales que

$$\{a_1, \ldots, a_{k-1}\} \cup \{b_k, \ldots, b_n\} \text{ es una base de } E.$$

En particular, eso significa que existen escalares $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$a_k = \sum_{i=1}^{k-1} c_i a_i + \sum_{i=k}^{n} c_i b_i.$$

Notemos que los escalares $c_k, \ldots, c_n$ no pueden ser todos nulos, ya que $\{a_1, \ldots, a_k\}$ es linealmente independiente. Sea $\ell \in \{k, \ldots, n\}$ tal que $c_k \neq 0$. Probaremos que el conjunto

$$B' = \{a_1, \ldots, a_k\} \cup (\{b_k, \ldots, b_n\} \setminus \{b_\ell\}) \text{ es una base.}$$

Como los coeficientes de a_k usando la base $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\} \cup \{b_k, \ldots, b_n\}$ son únicos, eso implica que no puede escribirse sin utilizar b_ℓ. luego, como $\{a_1, \ldots, a_{k-1}\} \cup \{b_k, \ldots, b_n\} \setminus \{b_\ell\}$ es linealmente independiente y no se puede escribir a_k como combinación lineal de elementos de ese conjunto, se deduce que B' es también linealmente independiente.

Para ver que es generador, podemos escribir

$$b_\ell = \frac{1}{c_\ell}\left(a_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_i a_i - \sum_{i=k}^{n} c_i b_i + c_\ell b_\ell\right).$$

Reordenando los términos obtenemos

$$b_\ell = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{-c_i}{c_\ell} a_i + \frac{1}{c_\ell} a_k + \sum_{i=k, i\neq \ell}^{n} \frac{-c_\ell}{c_\ell} b_i.$$

Luego b_ℓ está en el conjunto generado por B'. Como ya es cierto que $\{a_1, \dots, a_{k-1}\} \cup \{b_k, \dots, b_n\}$ es una base de E, obtenemos que B' genera todo E. $\square$

Teorema 1.3.2: Teorema de rango-nulidad

Sea $T\colon E \to F$ una transformación lineal y supongamos que $\dim(E) < \infty$. Entonces

$$\dim(E) = \mathrm{Nul}(T) + \mathrm{Rango}(T).$$

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dim(E) = n$ y escribamos $k = \mathrm{Nul}(T)$. Entonces existe una base $\{b_1, \dots, b_k\}$ de $\mathrm{Ker}(T)$ que se puede completar a una base $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ de E (Si $k = 0$, entonces $\{b_1, \dots, b_k\} = \varnothing$ y la base de E es una base arbitraria).

Argumentaremos que el conjunto $\{T(b_{k+1}), \dots, T(b_n)\}$ es una base para $\mathrm{Im}(T)$. En efecto, como B es una base de E, entonces el conjunto

$$\{T(b_1), \dots, T(b_n)\} = \{T(b_1), \dots, T(b_k)\} \cup \{T(b_{k+1}), \dots, T(b_n)\},$$

genera $\mathrm{Im}(T)$. Como $T(b_1) = \cdots = T(b_k) = 0$, tenemos que $\{T(b_{k+1}), \dots, T(b_n)\}$ es un generador de $\mathrm{Im}(T)$.

Falta mostrar que $\{T(b_{k+1}), \dots, T(b_n)\}$ es linealmente independiente. Tomemos escalares $a_{k+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i T(b_i) = 0$$

Debemos demostrar que todos los escalares son 0. Por linealidad de T se tiene que

$$T\left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i b_i\right) = 0.$$

Por lo cual concluimos que el vector $\sum_{i=k+1}^{n} a_i b_i$ está en el núcleo de T. Luego se puede escribir como combinación lineal de $\{b_1, \dots, b_k\}$, es decir, existen $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{k} a_i b_i = \sum_{i=k+1}^{n} a_i b_i$$

Si definimos $c_i = a_i$ para $i \in \{1, \dots, k\}$ y $c_i = -a_i$ para $i \in \{k+1, \dots, n\}$ podemos reescribir la ecuación anterior de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} c_i b_i = 0.$$

Pero como $\{b_1, \dots, b_n\}$ es una base de E, en particular es linealmente independiente y eso implica que todos los valores c_i son 0, luego todos los valores a_i son 0. Esto prueba que $\{T(b_{k+1}), \dots, T(b_n)\}$ es linealmente independiente.

Finalmente, como $\{T(b_{k+1}),\ldots,T(b_n)\}$ es base de $\mathrm{Im}(T)$, tenemos que $\mathrm{Rango}(T) = \dim(\mathrm{Im}(T)) = n-k$. Luego

$$\dim(E) = n = k + (n-k) = \dim(\mathrm{Ker}(E)) + \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

Que es lo que queríamos demostrar. □

Una aplicación del teorema anterior es la caracterización siguiente sobre la invertibilidad de un operador

Corolario 1.3.3

Sea $T\colon E \to E$ un operador y $\dim(E) < \infty$. Las afirmaciones siguiente son equivalentes.

1. T es biyectiva.
2. $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$
3. $\mathrm{Nul}(T) = 0$.
4. $\mathrm{Rango}(T) = \dim(E)$.
5. $\mathrm{Im}(T) = E$.

Demostración. Supongamos (1), luego claramente $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ pues de lo contrario existiría $x \in \mathrm{Ker}(T) \setminus \{0\}$ tal que $T(0) = T(x) = 0$, contradiciendo la inyectividad. (2) claramente implica (3). Si asumimos (3), el teorema de rango nulidad dice que

$$\dim(E) = \mathrm{Nul}(T) + \mathrm{Rango}(T) = 0 + \mathrm{Rango}(T).$$

Luego obtenemos (4).

Supongamos (4), luego existe una base de $\mathrm{Im}(T) \subseteq E$ con $\dim(E)$ elementos. En particular este es un conjunto linealmente independiente en E con $\dim(E)$ elementos, lo cual implica que es generador. Luego $\mathrm{Im}(T) = E$ y tenemos (5). Finalmente, supongamos (5), como $\mathrm{Im}(T) = E$ tenemos que T es sobreyectiva. Para ver que es inyectiva notemos que como $\mathrm{Im}(T) = E$ entonces $\mathrm{Rango}(T) = \dim(E)$, por el teorema de rango nulidad obtenemos entonces que $\mathrm{Nul}(T) = 0$, lo cual a su vez implica que $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ por lo cual T es inyectiva y obtenemos (1). □

Definición 1.3.4: Suma directa de espacios vectoriales

Sean E, F espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Definimos su **suma directa** como el espacio vectorial $E \oplus F$ dado por

$$E \oplus F = \{(x,y) : x \in E, y \in Y\}$$

Con las operaciones

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2),$$
$$c(x,y) = (cx, cy).$$

Ejemplo 1.3.5

Si $E = \mathbb{R}^3$ y $F = \mathbb{R}^2$. Entonces el espacio $E \oplus F$ está dado por

$$E \oplus F = \{((x_1,x_2,x_3),(x_4,x_5)) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 5\}.$$

Si bien formalmente $E \oplus F$ no es $\mathbb{R}^5$, es claro que es isomorfo a $\mathbb{R}^5$.

Definamos también las **inyecciones canónicas** $\iota_E \colon E \to E \oplus F$ y $\iota_F \colon F \to E \oplus F$ dadas por

$$\iota_E(x) = (x, 0_F) \text{ y } \iota_F(y) = (0_E, y) \text{ para todo } x \in E, y \in F.$$

Observación 1.6. Si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ son bases de espacios vectoriales E y F respectivamente, entonces $\iota_E(A) \cup \iota_F(B)$ es una base de $E \oplus F$. En particular

$$\dim(E \oplus F) = \dim(E) + \dim(F).$$

Observación 1.7. Las inyecciones canónicas son funciones lineales inyectivas. Luego son isomorfismos entre su dominio y su imagen. En ese sentido, $\iota_E(E)$ y $\iota_F(F)$ son subespacios de $E \oplus F$ que son isomorfos a E y F respectivamente.

También podemos definir las proyecciones canónicas $\pi_E \colon E \oplus F \to E$ y $\pi_F \colon E \oplus F \to F$ dadas por

$$\pi_E(x, y) = x \text{ y } \pi_F(x, y) = y \text{ para todo } (x, y) \in E \oplus F.$$

Observación 1.8. Tenemos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \pi_E \circ \iota_F &= 0 \\ \pi_F \circ \iota_E &= 0. \\ \pi_E \circ \iota_E &= \mathrm{id}_E \\ \pi_F \circ \iota_F &= \mathrm{id}_F \\ \iota_E \circ \pi_E + \iota_F \circ \iota_F &= \mathrm{id}_{E \oplus F}. \end{aligned}$$

En lo que sigue introduciremos una notación que si bien es más informal que lo anterior, simplifica bastante la descripción de subespacios.

Definición 1.3.6: Descomposición en suma directa

Sea E un espacio vectorial y sean U, V subespacios de E. Escribiremos que $E = U \oplus V$ si $U \cap V = \{0\}$ y todo $x \in E$ puede escribirse de la forma $x = u + v$ para algún $u \in U$, $v \in V$.

Formalmente hablando, esta definición no coincide con la definición de suma directa anterior. Sin embargo la siguiente proposición permitirá justificar que E es isomorfo a la suma directa de los espacios U y V.

Proposición 1.3.7: Unicidad de la escritura en la descomposición

Si $E = U \oplus V$, entonces todo $x \in E$ se escribe de manera única como suma de elementos de U y V.

Demostración. En efecto, si $x = u + v = u' + v'$ entonces $(u - u') + (v - v') = 0$. Definiendo $u'' = u - u' \in U$ y $v'' = v' - v \in V$, tenemos que $u'' = v''$, luego $u'' = v'' = 0$. De ahí vemos que $u = u'$ y $v = v'$. $\square$

Por lo anterior, E es isomorfo a la suma directa $U \oplus V$ mediante la identificación $L \colon E \to U \oplus V$ dada por

$$L(x) = (u, v),$$

Si x se escribe de la forma $x = u + v$ para $u \in U, v \in V$. De este modo se justifica la notación para la descomposición en suma directa.

1.4. Producto escalar, proyecciones y ortogonalidad

Definición 1.4.1: Producto escalar canónico

El **producto escalar** de dos vectores $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ está dado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i.$$

En el caso de dos vectores $w = (w_1, \dots, w_n)$ y $z = (z_1, \dots, z_n)$ en $\mathbb{C}^n$ se define el producto escalar como

$$\langle w, z\rangle = \sum_{k=1}^{n} w_i \overline{z_i}.$$

Donde $\overline{z_i}$ denota al complejo conjugado de z_i.

En lo que sigue estudiaremos la noción de proyección. De manera informal, la proyección de un vector sobre un subespacio vectorial es el vector del subespacio que mejor representa al vector original, en otras palabras es su “sombra” sobre el conjunto. Una propiedad de la proyección sobre un conjunto es que si un elemento pertenece al conjunto donde se proyecta, entonces su proyección es él mismo.

En términos de una fórmula, tendríamos que si P es una proyección, entonces

$$P^2 = P.$$

En lo que sigue, utilizaremos la relación anterior para dar una definición abstracta de proyección para operadores.

Definición 1.4.2: Proyección

Sea E un espacio vectorial y $P\colon E \to E$ un operador. Decimos que P es una **proyección** si P es idempotente, es decir $P^2 = P$.

Podemos pensar que una proyección **proyecta** elementos del espacio vectorial E en su imagen $\mathrm{Im}(P)$.

Ejemplo 1.4.3

Sea E un espacio vectorial. La transformación $P = 0$ es una proyección pues $P^2 = P \circ P = 0$.

Ejemplo 1.4.4

Si A es una matriz en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, entonces la transformación lineal inducida sobre $\mathbb{C}^n$ es una proyección si y solamente si

$$A^2 = A.$$

En ese caso decimos que la matriz es una matriz de **proyección**.

Ejercicio 1.4.5

Muestre que las únicas proyecciones $P\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son la identidad y la función nula.

Ejercicio 1.4.6

Describa y dibuje tres ejemplos distintos de proyecciones $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Ejercicio 1.4.7

Construya ejemplos de dos matrices A, B de proyección en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que

- La suma $A+B$ no es una proyección.
- La composición AB no es una proyección.

Ejemplo 1.4.8

Sea $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vector y consideremos $P_v\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$P_v(x) = \frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2} v.$$

Luego P_v es una proyección, en efecto

$$P_v^2(x) = \frac{1}{\|v\|^2}\left\langle \frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2} v, v\right\rangle v = \frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2}\frac{\langle v, v\rangle}{\|v\|^2} v = \frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2} v = P_v(x).$$

El operador P_v se denomina la **proyección sobre** v.

Ejercicio 1.4.9

Sea $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vector y consideremos el operador $P_v^\perp = \mathrm{id} - P_v$. Muestre que $P_v^\perp$ es una proyección.

Ejemplo 1.4.10

Sea $E = C([0,1], \mathbb{R})$ el espacio de funciones continuas en $[0,1]$ con valores en $\mathbb{R}$. Para $g \in C([0,1], \mathbb{R})$ no nula considere el operador $P_g\colon E \to E$ dado por

$$P_g(f)(x) = g(x) \cdot \left(\int_0^1 g^2(t)\ \mathrm{d}t.\right)^{-1} \cdot \int_0^1 f(s)g(s)\ \mathrm{d}s. \quad \text{para todo } x \in [0,1]$$

Entonces P_g es una proyección.

Proposición 1.4.11: Descomposición mediante proyección

Sea $P\colon E \to E$ una proyección. Entonces

$$E = \operatorname{Ker}(P) \oplus \operatorname{Im}(P).$$

Demostración. Sea $x \in E$, podemos escribir

$$x = (x - P(x)) + P(x).$$

Denotemos $y = x - P(x)$. Tenemos que

$$P(y) = P(x) - P^2(x) = P(x) - P(x) = 0.$$

Luego $y \in \mathrm{Ker}(P)$. Obtenemos que todo $x \in E$ puede escribirse como suma de un elemento de $\mathrm{Ker}(P)$ y un elemento de $\mathrm{Im}(P)$.

Tomemos $z \in \mathrm{Ker}(P) \cap \mathrm{Im}(P)$. Como $z \in \mathrm{Im}(P)$ existe $x \in E$ tal que $z = P(x)$, y como $z \in \mathrm{Ker}(P)$ tenemos que $0 = P(z) = P^2(x)$. Como $P = P^2$ concluimos que $z = 0$. $\square$

Definición 1.4.12: Ortogonalidad

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Decimos que x e y son **ortogonales** si $\langle x, y\rangle = 0$.
Si U, V son subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, decimos que son ortogonales si $\langle u, v\rangle = 0$ para todo $u \in U$, $v \in V$.

Ejemplo 1.4.13

Sea $P\colon E \to E$ una proyección. En general los subespacios $\mathrm{Ker}(P)$ e $\mathrm{Im}(P)$ no son ortogonales, por ejemplo, si tomamos la proyección $P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ determinada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $\mathrm{Im}(A) = \{0\} \times \mathbb{R}$, en tanto que

$$\mathrm{Ker}(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = -y.\}.$$

Luego tenemos $(0, 1) \in \mathrm{Im}(A)$, $(-1, 1) \in \mathrm{Ker}(A)$ y

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1.$$

Ejemplo 1.4.14

Sea $v \in \mathbb{R}^n$. Entonces para todo par $x, y \in \mathbb{R}^n$ tenemos que

$$\langle P_v(x), P_v^{\perp}(y)\rangle = 0$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \langle P_v(x), P_v^{\perp}(y)\rangle &= \langle P_v(x), y - P_v(y)\rangle \\ &= \langle P_v(x), y\rangle - \langle P_v(x), P_v(y)\rangle \\ &= \frac{\langle x, v\rangle\langle v, y\rangle}{\|v\|^2} - \frac{\langle x, v\rangle\langle x, y\rangle}{\|v\|^4}\langle v, v\rangle = 0. \end{aligned}$$

Luego los conjuntos $P_v(\mathbb{R}^n)$ y $P_v^{\perp}(\mathbb{R}^n)$ son ortogonales.

Capítulo 2

Representación de operadores en formas canónicas

En este capítulo estudiaremos la representación de operadores en bases distintas a usual que permites una mejor descripción del operador y simplifican enormemente las operaciones algebraicas.

Sea $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador. Como ya estudiamos anteriormente, T puede representarse de manera matricial mediante

$$T(x) = Ax,$$

donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz cuadrada cuyos coeficientes están dados por $A_{i,j} = T(e_j)_i$ para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Ejemplo 2.0.1

Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (2x, \frac{y}{2})$. Entonces la base canónica da una representación muy práctica:

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Geométricamente, la transformación anterior expande la dirección de x multiplicando por 2, y contrae la dirección de y multiplicando por $\frac{1}{2}$. Para visualizarlo, consideremos el conjunto $[0,1] \times [0,1]$ coloreado con un gatito[a] como en la Figura 1. La transformación T envía $[0,1] \times [0,1]$ a $[0,2] \times [0, \frac{1}{2}]$.

[a] El gato del dibujo se llama “The Hermitage Court Outrunner Cat” y es una pintura de Eldar Zakirov.

Figura 1. La aplicación de la transformación $T(x,y) = 2x + \frac{y}{2}$ sobre un gatito.

Uno podría preguntarse si realmente es lo mejor siempre representar cada transformación lineal usando la base canónica. Para ello, consideremos el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.0.2

Sea $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x+y, x)$. La representación matricial utilizando la base canónica está dada por

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La descripción geométrica de lo que hace esta matriz es más difícil de describir que la anterior. Nuevamente, intentemos visualizarla utilizando el mismo gatito, ver Figura 2

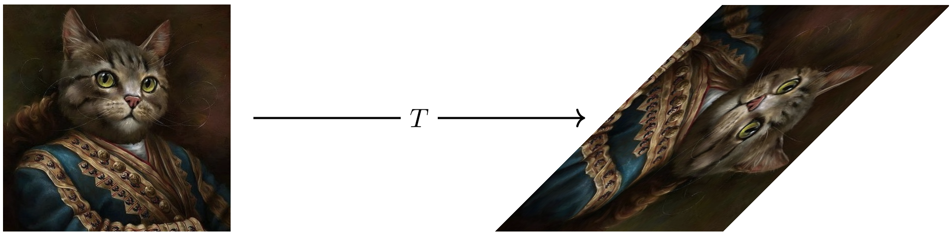


FIGURA 2. La aplicación de la transformación $T(x, y) = (x + y, x)$ sobre un gatito.

En la Figura 2 se observa que la imagen se deforma de un modo extraño. Parece expandirse en una dirección y contraerse en otra. En este caso, parecería más natural utilizar las direcciones de expansión y contracción como base. Para estudiar esto, deberemos introducir la noción de valor y vector propio.

2.1. Valores y vectores propios

Definición 2.1.1: Valores propios

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $T\colon E \to E$ un operador. Decimos que un valor $\lambda \in \mathbb{K}$ es un **valor propio** si existe un vector $v \in E \setminus \{0\}$ tal que

$$T(v) = \lambda v.$$

Al conjunto de valores propios asociados a un operador se le denomina **espectro**.

Notemos que en la definición anterior excluimos el vector $v = 0$, pues de lo contrario todo escalar sería un valor propio.

Definición 2.1.2: Vectores propios

Sea E un espacio vectorial, $T\colon E \to E$ un operador y λ un valor propio de T. Decimos que $v \in E \setminus \{0\}$ es un **vector propio** asociado a λ si

$$T(v) = \lambda v.$$

La colección de todos los vectores $v \in E$ tales que $T(v) = \lambda v$ es un subespacio de E denominado **espacio propio** asociado al valor λ.

La acción de un operador sobre un vector propio es siempre una multiplicación por un escalar (el valor propio λ). En el caso de un valor propio real esto se interpreta como una expansión (si $\lambda \geq 1$) o una contracción (si $\lambda \leq 1$). En el caso de un valor propio complejo $\lambda = \rho e^{i\theta}$ se puede interpretar como una expansión o contracción por ρ y una rotación en un ángulo θ.

En lo que sigue, calcularemos los valores y vectores propios de la transformación $T(x, y) = (x+y, x)$. Esto servirá de ejemplo para motivar las dificultades que encontraremos en este tipo de situaciones.

Ejemplo 2.1.3

Consideremos nuevamente $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (x+y,x)$. Para encontrar los valores propios de T debemos resolver la ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} v = \lambda v = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} v.$$

que puede reescribirse como

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como pedimos que $v \neq 0$, necesitamos que el núcleo de la matriz de la izquierda sea no trivial, equivalentemente, que la matriz sea singular. Por lo tanto para resolver necesitamos que

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right) = -\lambda(1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

De donde se obtiene que los valores propios son

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad ,\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Para encontrar los vectores propios, simplemente resolvemos $Av = \lambda v$ para cada valor propio mediante eliminación de Gauss. Un cálculo directo entrega que dos valores propios v_1, v_2 asociados a λ_1, λ_2 respectivamente son

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En la Figura 3 se observan los vectores propios en la imagen del gatito.

FIGURA 3. Vectores propios de la transformación $T(x,y) = (x+y,x)$.

Los cálculos del ejemplo anterior nos dicen que quizás es mejor utilizar la base formada por los vectores propios. De este modo, si consideramos $B = \{v_1, v_2\}$ entonces $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ y $T(v_2) = \lambda_2 v_2$. Por lo cual es como si la matriz asociada a esta nueva base fuese una matriz diagonal. El objetivo de este capítulo es dar un marco teórico a esta idea, y comprender cuando una matriz puede llevarse a una forma diagonal mediante el cálculo de sus valores y vectores propios.

En el ejemplo anterior podemos apreciar que el encontrar valores propios asociados a un operador conlleva encontrar las raíces de un polinomio. Es por esta razón que privilegiaremos el uso de $\mathbb{C}$ por sobre $\mathbb{R}$ ya que es algebraicamente cerrado (todo polinomio no constante admite una raíz).

En lo que sigue, justificaremos el argumento del ejemplo mediante la proposición siguiente.

Proposición 2.1.4: Fórmula para calcular valores propios

Sea $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un operador y $\lambda \in \mathbb{K}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. λ es un valor propio de T.
2. $(T - \lambda\,\mathrm{id})$ es singular (no invertible).
3. $\det(T - \lambda\,\mathrm{id}) = 0$.

Demostración. La equivalencia de (2) y (3) ya la sabemos. Supongamos que (1) es cierta, luego existe $v \in E \setminus \{0\}$ tal que $T(v) = \lambda v$, de donde se obtiene que $v \in \mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{id})$. Como $v \neq 0$ obtenemos que $T - \lambda\,\mathrm{id}$ es singular. Inversamente, supongamos que (2) es cierta, luego como $(T - \lambda\,\mathrm{id})$ no es invertible, tenemos que $\mathrm{Ker}(T - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0\}$. Luego existe $v \neq 0$ tal que $(T - \lambda\,\mathrm{id})(v) = 0$, de donde obtenemos que

$$T(v) = \lambda v.$$

Por lo cual tenemos que λ es un valor propio de T. □

La proposición anterior asegura que en un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, siempre existen valores propios, y son precisamente las raíces de un polinomio que se obtiene al calcular $\det(T - \lambda\,\mathrm{id})$. En el caso de dimensión infinita lo anterior no es cierto

Ejemplo 2.1.5

Sea $\mathbb{C}[x]$ el espacio de los polinomios a coeficientes reales y consideremos el operador $T\colon \mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[x]$ dado por

$$T(p)(x) = xp(x).$$

Es sencillo verificar que T es efectivamente un operador. Por otro lado, si $p \neq 0$ entonces $\deg(T(p)) = \deg(p) + 1$, por lo cual para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ la ecuación

$$T(p) = \lambda p,$$

no admite soluciones salvo $p = 0$.

Ejercicio 2.1.6

Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es contractante si existe $0 \leq C < 1$ tal que

$$\|Av\| \leq C\|v\|, \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^n.$$

Muestre que si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de A, entonces $|\lambda| < 1$.

Ejercicio 2.1.7

Calcule los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.1.8

Sea P un operador de proyección. Muestre que si λ es un valor propio de P entonces $\lambda \in \{0, 1\}$.

La expresión $\det(T - \lambda \operatorname{id})$ es siempre un polinomio en la variable λ. Esto motiva la definición siguiente.

Definición 2.1.9: Polinomio característico

El **polinomio característico** de un operador $T \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ es el polinomio $p_T \in \mathbb{K}[t]$ dado por

$$p_T(t) = \det(tI - A).$$

donde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es la matriz asociada al operador T.

También escribiremos $P_A(t) = \det(t \operatorname{id} - A)$ para denominar el polinomio característico asociado a una matriz cuadrada A.

Observación 2.1. A priori, también hace sentido definir el polinomio característico como $\det(A - t \operatorname{id})$ (y algunes autores lo hacen así). La ventaja de hacerlo como lo definimos es que nos aseguramos de que el coeficiente que acompaña a t^n es siempre 1, es decir, el polinomio característico es **mónico**.

Ejercicio 2.1.10

Sea n un entero positivo y $T \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ un operador. Muestre que

$$\det(T - t \operatorname{id}) = (-1)^n \det(t \operatorname{id} - T).$$

Concluya que si n es par, ambas definiciones dan el mismo polinomio.

Ejercicio 2.1.11

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Muestre que si A^T es la matriz transpuesta de A entonces

$$p_A = p_{A^T}.$$

El siguiente ejemplo muestra como el polinomio característico es útil para analizar familias de transformaciones lineales.

Ejemplo 2.1.12

Sea $\alpha \in [0, 2\pi)$ y considere la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Note que esta matriz representa una rotación de ángulo α en $\mathbb{R}^2$ con respecto al origen. El polinomio característico de A está dado por

$$p_A(t) = t^2 - 2t\cos(\alpha) + 1.$$

Notemos que este polinomio admite raíces reales si se cumple que $(2\cos(\alpha))^2 - 4 \geq 0$, o equivalentemente si $\cos^2(\alpha) \geq 1$, luego esto ocurre solamente si $\alpha \in \{0, \pi\}$. El caso $\alpha = 0$ corresponde a la identidad, y $\alpha = \pi$ corresponde a $-\operatorname{id}$ (una rotación en 180 grados).

Si $\alpha \notin \{0, \pi\}$ entonces las raíces de p_A son valores complejos conjugados de módulo 1. Luego, la matriz A no admite valores propios reales.

Hay matrices para las cuales es muy fácil calcular su polinomio característico, y también sus valores propios.

Definición 2.1.13: Matrices diagonales y triangulares

Decimos una matriz $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es

1. **triangular superior** si $a_{i,j} = 0$ para todo $i > j$.
2. **triangular inferior** si $a_{i,j} = 0$ para todo $i < j$.
3. **diagonal** si $a_{i,j} = 0$ para todo $i \neq j$.

Diremos que una matriz es **triangular**, si es triangular superior o inferior.

Notemos que una matriz es diagonal, si y solamente si es triangular superior e inferior a la vez. Una ventaja de este tipo de matrices es que es muy sencillo calcular su polinomio característico y valores propios.

Proposición 2.1.14: Polinomio característico de matrices triangulares

Sean $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz triangular. Entonces su polinomio característico está dado por

$$p_A(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - a_{i,i}) = (t - a_{1,1})(t - a_{2,2}) \dots (t - a_{n,n}).$$

Demostración. Por el Ejercicio 2.1.11, el polinomio característico de una matriz es igual al de su transpuesta, luego basta mostrar el resultado para matrices triangulares superiores.

Procederemos por inducción en $n \in \mathbb{N}$. El caso $n = 1$ es evidente. Sea $n \ge 2$ y supongamos el resultado válido para $n - 1$. Denotemos por $[tI - A]_{i,j}$ la matriz que resulta al eliminar la fila i y la columna j de $tI - A$. Por la fórmula de Laplace para el determinante (por filas) tenemos que

$$p_A(t) = \det(tI - A) = \sum_{i=1}^{n} (tI - A)_{i,1} (-1)^{i+1} \det([tI - A]_{1,j}).$$

Como A es diagonal superior, tenemos que $a_{i,1} = 0$ para todo $i \ge 2$, luego

$$p_A(t) = \det(tI - A) = (t - a_{1,1}) \det([tI - A]_{1,1}).$$

Pero la matriz $[tI - A]_{i,j}$ es triangular superior, luego por hipótesis inductiva su determinante es

$$\det([tI - A]_{1,1}) = \prod_{i=2}^{n} (t - a_{i,i}).$$

De donde obtenemos que

$$p_A(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - a_{i,i}).$$

$\square$

Corolario 2.1.15: Valores propios de matrices triangulares

Si A es una matriz triangular entonces sus valores propios son los elementos de su diagonal.

2.2. Matrices semejantes y diagonalización

Recordemos que denotamos por $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ el conjunto de las matrices $n \times n$ con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$. También denotamos por $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ el subconjunto de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formado por las matrices invertibles. Notemos $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es un monoide si consideramos como operación la composición y que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ es un subgrupo de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ denominado el **grupo general lineal** de grado n sobre $\mathbb{K}$.

Definición 2.2.1: Matrices semejantes

Decimos que dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son **semejantes** (o similares) si existe una matriz invertible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$B = PAP^{-1}.$$

Recordemos que si $(M, \cdot)$ es un monoide, dos elementos $x, y \in M$ son **conjugados** si existe un elemento $z \in M$ invertible tal que $x = zyz^{-1}$. Una manera abstracta de entender la noción de matrices semejantes, es que dos matrices son semejantes si y solamente si son conjugadas en el monoide $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Una manera menos abstracta de entender la noción de matrices semejantes es interpretando la matriz P tal que $A = P^{-1}BP$ como una matriz de cambio de base. En efecto, como P es invertible, tenemos que el conjunto $\mathcal{P} = \{P(e_1), \ldots, P(e_n)\}$ forma una base de $\mathbb{K}^n$, luego podemos pensar a las matrices A y B como expresiones de una misma transformación lineal T, donde A es la expresion de T con respecto a la base canónica en tanto que B es la expresión de T con respecto a la base $\mathcal{P}$.

En efecto, si A es la matriz asociada a un operador $T\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ y representamos la expresión de un vector $x \in \mathbb{K}^n$ en la base $\mathcal{P}$ como $[x]_{\mathcal{P}}$ entonces tenemos el diagrama de la Figura 4

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "A"] \arrow[d, "P"] & T(x) & & A = P^{-1}BP \\ {[x]_{\mathcal{P}}} \arrow[r, "B"] & {[T(x)]_{\mathcal{P}}} \arrow[u, "P^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Figura 4. Diagrama conmutativo que captura la interpretación de la semejanza de matrices como expresiones en bases distintas.

Proposición 2.2.2: Matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico

Sean A, B matrices cuadradas sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Si A y B son semejantes, entonces sus polinomios característicos coinciden.

Demostración. Como A y B son semejantes, existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$. Luego podemos escribir

$$\lambda I - B = \lambda I - P^{-1}AP = \lambda P^{-1}P - PAP^{-1} = P^{-1}(\lambda I - A)P.$$

Luego tenemos que

$$\begin{aligned} p_B(t) &= \det(tI - B) \\ &= \det(P(tI - A)P^{-1}) \\ &= \det(P^{-1})\det(tI - A)\det(P) \\ &= p_A(t)\det(P^{-1})\det(P) \\ &= p_A(t). \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar. □

Ejercicio 2.2.3

Sean A, B matrices cuadradas semejantes sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Muestre que

1. $\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Nul}(B)$.
2. $\mathrm{Rango}(A) = \mathrm{Rango}(B)$.

Observación 2.2. El resultado del ejercicio anterior es falso si reemplazamos la nulidad por el núcleo. En efecto, los núcleos de dos matrices semejantes no tienen por qué coincidir (ejercicio: encontrar un ejemplo).

Ejercicio 2.2.4

Muestre que el converso del teorema anterior no es cierto. Es decir, que hay matrices que tienen el mismo polinomio característico pero sin embargo no son semejantes. Más precisamente muestre que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tienen el mismo polinomio característico pero no son similares. *Indicación:* calcule la nulidad de cada matriz.

Ejercicio 2.2.5

Muestre que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y A es invertible entonces

$$p_{AB} = p_{BA}.$$

Observación 2.3. El resultado del ejercicio anterior es verdad inclusive cuando ninguna de las matrices es invertible, pero se requieren argumentos de análisis (densidad de las matrices no singulares y continuidad del polinomio característico) para demostrarlo.

El interés en considerar matrices semejantes es poder dar una descripción más sencilla de la transformación lineal en una base conveniente. Veremos que hay razones algebraicas que hacen muy conveniente encontrar matrices semejantes que sean triangulares o diagonales.

Definición 2.2.6: Matriz diagonalizable

Decimos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es **diagonalizable** sobre $\mathbb{K}$ si es semejante a una matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A es diagonalizable, entonces $A = PDP^{-1}$ para una matriz diagonal D y una matriz invertible P. A la matriz P se le denomina **matriz de paso**. Al proceso de, dada la matriz A, encontrar la matriz diagonal D y la matriz de paso P se le denomina **diagonalización**.

Las matrices diagonales son sencillas de interpretar geométricamente. En cada dirección canónica simplemente actúan mediante multiplicación por un escalar. Una razón algebraica para considerar matrices similares diagonales es que la exponenciación se vuelve muy sencilla

Ejemplo 2.2.7

Si A y D son matrices semejantes, entonces existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tal que $A = PDP^{-1}$. Exponenciando ambos lados obtenemos

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}.$$

En particular si $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ es una matriz diagonal, entonces

$$(D^n)_{i,j} = \begin{cases} d_{i,i}^n & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Luego la matriz A^n puede calcularse de manera sencilla utilizando la expresión PD^nP^{-1}.

Uno puede preguntarse si todas las matrices son diagonalizables. Supongamos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$, luego $A = PDP^{-1}$ para una matriz diagonal $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. En particular, el polinomio característico de A coincide con el polinomio característico de D. Luego

$$p_A(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - d_{i,i}).$$

Eso nos dice que los elementos de la diagonal de D son exactamente los valores propios de A y que cada valor propio aparece en D tantas veces como $(t - \lambda)$ divide a $p_A(t)$. En particular, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces todos los valores propios de A deben ser reales. El siguiente ejemplo muestra que hay matrices que no son diagonalizables.

Ejemplo 2.2.8

Consideremos la matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es $p_A(t) = t^2 + 1$ que no admite raíces reales. Luego no puede ser diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

En el ejemplo anterior podemos reinterpretar la matriz A como una matriz en $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, donde ahora sus valores propios son i y $-i$. En efecto, si bien A no es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$, sí es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$, basta considerar

$$D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad A = PDP^{-1}.$$

Ahora uno podría preguntarse, si $\mathbb{K}$ es algebraicamente cerrado (es decir, todo polinomio no constante en $\mathbb{K}[x]$ admite una raíz en $\mathbb{K}$), ¿es toda matriz en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalizable? Veremos que la respuesta es también negativa. Para ello, supongamos que una matriz A es diagonalizable, i,e $A = PDP^{-1}$ para una matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ y escribamos $AP = PD$.

Por el argumento anterior, si λ es valor propio de A, entonces ocurre en la diagonal de D, digamos en su elemento $d_{i,i} = \lambda$. Consideremos el vector canónico e_i, entonces

$$A(Pe_i) = (AP)e_i = (PD)e_i = P(De_i) = P(\lambda e_i) = \lambda(Pe_i).$$

Como P es invertible, luego $Pe_1 \neq 0$. Obtenemos que Pe_i es un vector propio de A asociado al valor propio λ. Como P es invertible, entonces necesariamente el conjunto $\{Pe_1, \ldots, Pe_n\}$ deben ser n vectores propios de A linealmente independientes.

Ejemplo 2.2.9

Consideremos la matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es $p_A(t) = (t-1)^2$, luego su único valor propio es $\lambda = 1$. El espacio propio asociado a $\lambda = 1$ es

$$Ker(\lambda I - A) = Ker \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Luego $\dim(\ker(\lambda I - A)) = 1$, por lo cual $\lambda = 1$ no puede producir dos vectores propios linealmente independientes. Esto indica que A no es diagonalizable.

Podemos refinar aún más el argumento anterior. Por la fórmula para el polinomio característico de una diagonal, tenemos que si $(t-\lambda)^k$ divide a $P_A(t)$ entonces λ ocurre k veces en D. Luego si A es diagonalizable obtenemos que $\mathrm{Ker}(\lambda I - A)$ debe tener dimensión al menos k. Esto motiva la definición siguiente.

Definición 2.2.10: Multiplicidad de valores propios

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada sobre $\mathbb{K}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de A.

1. La **multiplicidad algebraica** $\mu_A(\lambda)$ de λ es el exponente del término $(t-\lambda)$ en el polinomio característico $p_A(t)$.
2. La **multiplicidad geométrica** $\gamma_A(\lambda)$ de λ es la dimensión del espacio propio $Ker(\lambda I - A)$ asociado a λ.

Notemos que la $1 \leq \gamma_A(\lambda) \leq \mu_A(\lambda)$. Por definición todo valor propio λ de A admite al menos un vector propio no nulo, luego $\gamma_A(\lambda) \geq 1$. Para ver la otra desigualdad, podemos encontrar una base $\{v_1, \ldots, v_{\gamma_A(\lambda)}\}$ de
$Ker(\lambda I - A)$. Completemos ese conjunto a una base de $\mathbb{K}^n$

$$B = \{v_1, \ldots, v_{\gamma_A(\lambda)}, b_{\gamma_A(\lambda)+1}, \ldots b_n\}.$$

Sea J una matriz cuyas columnas están dadas por los vectores de B. Luego escribiendo $D = J^{-1}AJ$ obtenemos que D es una matriz por bloques que satisface que $D_{i,i} = \lambda$ si $1 \leq i \leq \gamma_A(\lambda)$ y $D_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ y $1 \leq i,j \leq \gamma_A(\lambda)$. De aquí obtenemos que $(t-\lambda)^{\gamma_A(\lambda)}$ divide a $p_D(t) = p_A(t)$. Luego $\gamma_A(\lambda) \leq \mu_A(\lambda)$.

La próxima proposición muestra que el cálculo anterior no solo da una condición necesaria, sino que es suficiente.

Proposición 2.2.11: Equivalencias diagonalización

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada sobre $\mathbb{K}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. A es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$.
2. $\mathbb{K}^n$ admite una base de vectores propios de A.
3. $\mathbb{K}^n$ es la suma directa de los espacios propios de A.
4. El polinomio característico es soluble sobre $\mathbb{K}$ y la multiplicidad algebraica de cada valor propio es igual a su multiplicidad geométrica.

Demostración. Supongamos (1), luego $A = PDP^{-1}$ para una matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. El argumento que dimos anteriormente muestra que $\{Pe_1, \dots, Pe_n\}$ es una base de vectores propios de $\mathbb{K}^n$, por lo cual tenemos (2).

Supongamos (2) y sea $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{K}^n$ formada por vectores propios de A. Como cada vector propio está asociado a un valor propio, existen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (no necesariamente distintos) tales que $v_i \in$
$Ker(\lambda_i I - A)$. Como B es base, tenemos que todo elemento de $\mathbb{K}^n$ se puede escribir como suma de elementos en los espacios propios. Supongamos $\lambda_i \neq \lambda_j$, basta mostrar que los espacios propios tienen intersección trivial. En efecto, supongamos que $u \in$
$Ker(\lambda_i I - A) \cap$
$Ker(\lambda_j I - A)$, luego $Au = \lambda_i u = \lambda_j u$, de donde obtenemos que $(\lambda_i - \lambda_j)u = 0$. Como $\lambda_i \neq \lambda_j$, obtenemos que $u = 0$. Esto prueba (3).

Supongamos (3), Primero mostremos que $p_A(t)$ es soluble en $\mathbb{K}$. Sea λ una raíz de $p_A(t)$ (posiblemente en la cerradura algebraica de $\mathbb{K}$). Como $\mathbb{K}^n$ es suma directa de los subespacios propios, tenemos que los vectores propios asociados a λ están en $\mathbb{K}^n$. Como $Av = \lambda v$ y $v \in \mathbb{K}^n$, tenemos que $Av \in \mathbb{K}^n$ y luego $\lambda v \in \mathbb{K}^n$. Como $v \neq 0$ se deduce fácilmente que $\lambda \in \mathbb{K}$.

Como $p_A(t)$ es soluble en $\mathbb{K}$, tenemos que

$$\sum_{\lambda \text{ valor propio de A}} \mu A(\lambda) = n.$$

Por otro lado, como $\mathbb{K}^n$ es la suma directa de sus subespacios propios, tenemos que

$$\sum_{\lambda \text{ valor propio de A}} \gamma_A(\lambda) = n.$$

Como $\gamma_A(\lambda) \leq \mu_A(\lambda)$, tenemos necesariamente que $\gamma_A(\lambda) = \mu_A(\lambda)$ para todo valor propio λ de A. Esto prueba (4).

Finalmente, supongamos (4). Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los valores propios de A repetidos según su multiplicidad algebraica (cada $\lambda \in \mathbb{K}$ aparece $\mu_A(\lambda)$ veces en la lista). Definamos una matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donde

$$D_{i,j} = \begin{cases} \lambda_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Recordemos que los espacios propios
$Ker(\lambda I - A)$ se intersectan trivialmente para valores distintos de λ. Como $\mu_A(\lambda) = \gamma_A(\lambda)$ para todo λ, podemos encontrar $\mu_A(\lambda)$ vectores propios linealmente independientes entre sí para cada λ valor propio de A. En particular podemos construir una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ donde v_i es vector propio de λ_i. Consideremos la matriz $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tal que

$$Pe_i = v_i.$$

Es decir, la columna i de P coincide con el vector v_i. Por definición P es invertible. Mostremos que $A = PDP^{-1}$ y que por lo tanto A es diagonalizable.

En efecto, por linealidad basta probar la igualdad en una base de $\mathbb{K}^n$. En particular si tomamos la base B, tenemos que

$$PDP^{-1}v_i = PDe_i = P\lambda_i e_i = \lambda_i v_i = Av_i.$$

Por lo que la igualdad es cierta. Concluimos que A es diagonalizable sobre $\mathbb{K}$ y por lo tanto tenemos (1). $\square$

El último argumento de la prueba anterior nos entrega un método para determinar si una matriz es diagonalizable y, si lo fuese, encontrar la matriz diagonal y la matriz de paso.

1. **Paso 1**: Encontrar el polinomio característico $p_A(t)$ de A.
2. **Paso 2**: Encontrar los valores propios de A calculando las raíces de p_A. Si no es soluble sobre $\mathbb{K}$ entonces A no es diagonalizable.
3. **Paso 3**: Para cada valor propio, calcular una base del espacio propio asociado. si $\gamma_A(\lambda) < \mu_A(\lambda)$ para algún valor propio, entonces A no es diagonalizable. De lo contrario sí lo es.
4. **Paso 4**: Construir la matriz diagonal D usando los valores propios λ_i de A repetidos según su multiplicidad. Construir una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ donde v_i es valor propio de λ_i. Definir la matriz de paso P escribiendo los vectores v_i en orden como columnas de P.
5. **Paso 5**: Con lo anterior, $A = PDP^{-1}$. Nunca hace daño multiplicar para verificar.

Ejemplo 2.2.12

La matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es diagonalizable. En efecto, si definimos $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\psi = -\varphi^{-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ entonces podemos escribir $A = PDP^{-1}$ de la forma siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \varphi \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

Desarrollemos el ejemplo anterior en detalle. Dada la matriz A, el primer paso es encontrar su polinomio característico. Tenemos que

$$p_A(t) = \det(tI - A) = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = (t-1)t - 1 = t^2 - t - 1.$$

Las dos raíces de $p_A(t)$ son $\lambda_1 = \varphi$ y $\lambda_2 = \psi$, que son entonces los valores propios. Escribimos entonces

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \psi \end{pmatrix}.$$

Para mostrar que A es diagonalizable, debemos tener que para cada valor propio, la multiplicidad geométrica coincide con la algebraica. como la multiplicidad geométrica es al menos 1 y todas las multiplicidades algebraicas son 1, tenemos que A es diagonalizable.

Para construir la matriz P, debemos encontrar un vector propio v_1 de λ_1, un vector propio v_2 de λ_2 y formar P escribiendo esos vectores como columna (en el mismo orden en que aparecen los valores propios en D). Un cálculo directo muestra que dos posibles vectores propios son

$$v_1 = \begin{pmatrix} \varphi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} \psi \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De donde obtenemos que

$$P = \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para calcular P^{-1}, nos aprovechamos de que la forma general para la inversa de una matriz invertible 2 por 2 es

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Luego tenemos que

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\psi \\ -1 & \varphi \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.2.13

Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Del ejemplo anterior deducimos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A^n &= \left[\begin{pmatrix} \varphi & -\varphi^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -\varphi^{-1} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & \varphi^{-1} \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} \right]^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi & -\varphi^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & (-\varphi)^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varphi^{-1} \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} & (-\varphi)^{-(n+1)} \\ \varphi^n & (-\varphi)^{-n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \varphi^{-1} \\ -1 & \varphi \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - (-\varphi)^{-(n+1)} & \varphi^n - (-\varphi)^{-n} \\ \varphi^n - (-\varphi)^{-n} & \varphi^{n-1} - (-\varphi)^{-(n-1)} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lo anterior por sí mismo parece un ejercicio sin motivo, pero en efecto sirve para dar una expresión exacta para los elementos de la secuencia de Fibonacci.

Ejemplo 2.2.14

Definimos la secuencia de Fibonacci como $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ para $n \geq 2$. Sus primeros elementos están dados por

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Note que se puede establecer la igualdad matricial

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Luego tenemos que para todo $n \geq 1$,

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En particular

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \varphi^n - (-\varphi)^{-(n)} & \varphi^{n-1} - (-\varphi)^{-(n-1)} \\ \varphi^{n-1} - (-\varphi)^{-(n-1)} & \varphi^{n-2} - (-\varphi)^{-(n-2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De donde deducimos que

$$F_n = \frac{\varphi^n - (-\varphi)^{-(n)}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

2.3. Recurrencias lineales

El Ejemplo 2.2.14 nos indica que la diagonalización de matrices es un método excelente para resolver recurrencias lineales.

Definición 2.3.1: Recurrencia lineal

Una **recurrencia lineal** de orden $k \geq 1$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ es una ecuación de la forma

$$y_n = f(n) + \sum_{i=1}^{k} c_{k-i} y_{n-i} \text{ para todo } n \geq k.$$

Donde $c_0, \dots, c_{k-1}$ son constantes en $\mathbb{K}$ y $f(n) \in \mathbb{K}$ es una función que depende únicamente de n.

Una recurrencia lineal se dice **homogénea** si el término $f(n)$ es igual a 0. Notemos que dada una recurrencia lineal de orden k, si fijamos los valores $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ entonces existe una única secuencia de valores $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que satisface la ecuación de la recurrencia.

Consideremos el caso de una recurrencia lineal donde el término $f(n)$ es igual a una constante $b \in \mathbb{K}$. El Ejemplo 2.2.14 nos indica que una manera útil de escribir la recurrencia es:

$$\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{k-1} & c_{k-2} & \cdots & \cdots & c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ y_{n-2} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-k} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Denotemos

$$\vec{x}_n = \begin{pmatrix} y_n \\ y_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ y_{n-k+1} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_{k-1} & c_{k-2} & \cdots & \cdots & c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz C se denomina **matriz compañera** de la recurrencia lineal homogénea $y_n = \sum_{i=1}^{k} c_{k-i} y_{n-i}$. Utilizando lo anterior, notemos que podemos escribir

$$\begin{aligned} \vec{x}_n &= C\vec{x}_{n-1} + \vec{b} \\ &= C^2\vec{x}_{n-2} + C\vec{b} + \vec{b} \\ &= \quad \vdots \end{aligned}$$

$$= C^{n-k+1}\vec{x}_{k-1} + (I + C + C^2 + \dots C^{n-k})\vec{b}.$$

El vector $\vec{x}_{k-1}$ corresponde a las condiciones iniciales $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$. Luego, para calcular el término general y_n, basta encontrar expresiones para C^{n-k+1} y $(I + C + C^2 + \dots C^{n-k})$.

En el caso en que C es una matriz diagonalizable, podemos escribir $C = PDP^{-1}$ con D una matriz diagonal y tendremos que

$$C^{n-k+1} = PD^{n-k+1}P^{-1}, \quad (I + C + C^2 + \dots C^{n-k}) = P\left(\sum_{i=0}^{n-k} D^i\right)P^{-1}.$$

Las cuales son fáciles de calcular.

A continuación mostraremos que la matriz compañera siempre tiene un polinomio característico que es fácil de calcular. Eso nos ahorrará el esfuerzo de hacerlo en cada caso.

Proposición 2.3.2: polinomio característico de una matriz compañera

Sea $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz compañera de la forma

$$C = \begin{pmatrix} c_{k-1} & c_{k-2} & \cdots & \cdots & c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces el polinomio característico de C está dado por la expresión

$$p_C(t) = t^k - \sum_{i=1}^{k} c_{k-i}t^{k-i} = t^k - c_{k-1}t^{k-1} - \dots - c_1 t - c_0$$

Demostración. Tenemos que $It - C$ está dada por

$$It - C = \begin{pmatrix} t - c_{k-1} & -c_{k-2} & \cdots & \cdots & -c_0 \\ -1 & t & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & t \end{pmatrix}.$$

Denotemos la matriz que resulta de eliminar una fila i y columna j de $It - C$ como $[It - C]_{i,j}$. Para calcular el determinante $p_C(t) = \det(It - C)$ podemos utilizar la regla de Laplace en la primera fila. Obtenemos que

$$\begin{aligned} p_C(t) &= (t - c_{k-1})\det([It - C]_{1,1}) - \sum_{j=2}^{k}(-1)^{j+1}c_{k-j}\det([It - C]_{1,j}) \\ &= t\det([It - C]_{1,1}) + \sum_{j=1}^{k}(-1)^{j}c_{k-j}\det([It - C]_{1,j}) \end{aligned}$$

Un cálculo sencillo muestra que

$$\det([It - C]_{1,j}) = (-1)^{j-1}t^{k-j}.$$

Reemplazando en la fórmula anterior tenemos que

$$\begin{aligned} p_C(t) &= t \cdot t^{k-1} + \sum_{j=1}^{k} (-1)^j (-1)^{j-1} t^{k-j} c_{k-j} \\ &= t^k - \sum_{j=1}^{k} t^{k-j} c_{k-j}. \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar. □

Observación 2.4. La propiedad anterior nos muestra que la matriz compañera puede utilizarse para construir matrices con un polinomio característico determinado. En otras palabras, todo polinomio mónico puede ser obtenido como polinomio característico de una matriz. Más precisamente si

$$p(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i = t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots + c_1 t + c_0,$$

entonces p es el polinomio característico de la matriz

$$\begin{pmatrix} -c_{n-1} & -c_{n-2} & \cdots & \cdots & -c_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2.3.3

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la secuencia determinada por la recurrencia lineal

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}.$$

Con valores iniciales $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ y $a_2 = 15$. Diagonalizando la matriz compañera, encuentre una expresión para a_n que sea válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observación 2.5. En general, si sabemos que la matriz compañera es diagonalizable, no es necesario diagonalizarla para encontrar la solución general. Basta notar que la solución será una combinación lineal de los valores propios al exponente n. Luego, si las raíces de p son $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ podemos fijar una solución general de la forma

$$a_n = A_1 \lambda_1^n + \cdots + A_k \lambda_k^n,$$

y utilizar las condiciones iniciales para determinar las constantes.

Ejercicio 2.3.4

Encuentre una solución al Ejercicio 2.3.3 sin diagonalizar la matriz compañera.

El esquema anterior también puede utilizarse para resolver sistemas de recurrencias lineales.

Ejercicio 2.3.5

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones que satisfacen

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$$

$$b_n = 4a_{n-1} + b_{n-1}$$

y $a_0 = b_0 = 1$. Exprese el sistema anterior como multiplicación de una matriz por un vector y encuentre una expresión para a_n y b_n que sea válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.4. Formas triangulares

Hasta ahora hemos estudiado la diagonalización de matrices y hemos visto que permite dar un análisis muy útil de la acción de un operador sobre sus expacios propios, y permite calcular de manera sencilla los exponentes A^n.

Sin embargo, hemos visto también que muchas matrices no son diagonalizables. En ese caso lo mejor que podemos esperar es encontrar una matriz semejante que tenga una forma, si bien no diagonal, al menos más agradable para realizar cálculos y probar resultados.

Definición 2.4.1: Matriz triangulable

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y A una matriz cuadrada. Decimos que A es triangulable sobre $\mathbb{K}$ si es semejante a una matriz triangular con coeficientes en $\mathbb{K}$.

Hoy demostraremos que toda matriz con coeficientes en un cuerpo algebraicamente cerrado (lo haremos en $\mathbb{C}$) es triangulable. Más adelante mostraremos que existe una forma matriz triangular superior especial, llamada forma canónica de Jordan, que permite dar una forma normal a todas las matrices.

Definición 2.4.2: Subespacio invariante

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $T\colon E \to E$ un operador. Un subespacio U de E se dice T-**invariante** si para todo $u \in U$ tenemos que $T(u) \in U$.

En general, si es claro que hablamos de un operador T, diremos simplemente que el subespacio es invariante, sin hacer referencia al operador.

Ejemplo 2.4.3

Dado un operador T, los subespacios $\operatorname{Ker}(T)$ e $\operatorname{Im}(T)$ son invariantes ya que en el primer caso $T(u) = 0 \in \operatorname{Ker}(T)$ para todo $u \in \operatorname{Ker}(T)$, y en el segundo $T(u) \in \operatorname{Im}(T)$ para todo $u \in E$, en particular, para todo $u \in \operatorname{Im}(T)$.

La noción de subespacio invariante generaliza la noción de espacio propio.

Ejemplo 2.4.4

Dado un operador T y un valor propio λ de T, el espacio propio asociado a λ es un espacio invariante, ya que si $v \in \operatorname{Ker}(\lambda I - v)$, entonces $T(v) = \lambda v \in \operatorname{Ker}(\lambda I - v)$.

Definición 2.4.5: Abanico

Sea E un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y $T \colon E \to E$ un operador. Una secuencia $V_1, \dots, V_n$ de subespacios de E se denomina un **abanico** para T si cumple lo siguiente:

1. $V_i \subseteq V_{i+1}$ para todo $1 \leq i < n$.
2. $\dim(V_i) = i$ para todo $1 \leq i \leq n$.
3. V_i es T-invariante para todo $1 \leq i \leq n$.

De la definición, es claro que $V_n = E$, ya que si E es de dimensión finita, entonces el único subespacio de E de dimensión $\dim(E)$ es E.

Definición 2.4.6: Base de abanico

Sea E un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$, $T \colon E \to E$ un operador y $V_1, \dots, V_n$ un abanico. Una conjunto de vectores $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una **base de abanico** si para todo $1 \leq i \leq n$, el espacio generado por $v_1, \dots, v_i$ es V_i.

Observación 2.6. Si un abanico $V_1, \dots, V_n$ existe, entonces siempre existe una base de abanico. Se puede elegir v_1 como cualquier vector no nulo de V_1. Como $V_1 \subseteq V_2$, se puede completar $\{v_1\}$ a una base $\{v_1, v_2\}$ de V_2 y así consecutivamente.

Ejercicio 2.4.7

Sea A una matriz diagonalizable y $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base, donde v_i es vector propio asociado a un valor propio λ_i. Muestre que $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de abanico para A.

Ejemplo 2.4.8

Sea $V_1, \dots, V_n$ un abanico para un operador T con base de abanico $B = \{v_1, \dots, v_n\}$. Entonces el operador T expresado como matriz en la base B es triangular superior. En efecto, como cada V_i es T-invariante tenemos que $T(v_i) \in V_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. En particular como $\{v_1, \dots, v_i\}$ es base de V_i existen escalares $\lambda_{i,j}$ con $1 \leq i < j \leq n$ tales que

$$\begin{aligned} T(v_1) &= \lambda_{1,1} v_1 \\ T(v_2) &= \lambda_{1,2} v_1 + \lambda_{2,2} v_2 \\ T(v_3) &= \lambda_{1,3} v_1 + \lambda_{2,3} v_2 + \lambda_{3,3} v_3 \\ \vdots &= \vdots \\ T(v_n) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} v_i. \end{aligned}$$

Luego la transformación T expresada como matriz en la base B tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \lambda_{1,3} & \dots & \lambda_{1,n} \\ 0 & \lambda_{2,2} & \lambda_{2,3} & \dots & \lambda_{2,n} \\ 0 & 0 & \lambda_{3,3} & \dots & \lambda_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Luego si existe un abanico para T, entonces la matriz A asociada a T con respecto a la base canónica es triangularizable. Un argumento similar muestra que si A es triangularizable, entonces existe un abanico para T, luego la existencia de abanicos caracteriza a las matrices triangularizables.

El ejemplo anterior muestra que, dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, si buscamos una matriz semejante que sea triangular, basta encontrar un abanico para el operador determinado por A. El siguiente resultado asegura que esta base siempre existe para matrices a coeficientes en $\mathbb{C}$.

Teorema 2.4.9: Existencia de abanicos

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ de dimensión $n > 1$ y $T\colon E \to E$ un operador. Entonces E admite un abanico para T.

Demostración. Procederemos por inducción en n. El caso base $n = 1$ es trivial. Sea $n > 1$ y supongamos que todo operador en un espacio de dimensión $n - 1$ admite un abanico

Como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, el operador T admite un vector propio $v_1 \neq 0$ asociado a un valor propio $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Sean $b_2, \ldots, b_n$ vectores en E tal que $\{v_1, b_2, \ldots, b_n\}$ es base de E. Sea V_1 el espacio generado por v_1 y W el espacio generado por $b_2, \ldots, b_n$, tenemos que

$$E = V_1 \oplus W.$$

Por lo anterior, tenemos que $\dim(W) = n - 1$. Nos gustaría usar la hipótesis inductiva, pero para ello necesitamos definir un operador sobre W ya que no es necesariamente cierto que W sea T-invariante.

Consideremos P_{V_1} y P_W las proyecciones de E sobre V_1 y W respectivamente. Notemos que como $E = V_1 \oplus W$ entonces $P_{V_1} + P_W = \mathrm{id}$.

Como $\mathrm{Im}(P_W) = W$, tenemos que $P_W T(W) \subseteq W$, luego si definimos $T' = P_W T$ entonces W es un espacio T'-invariante. Utilizando la hipótesis inductiva obtenemos que W admite un abanico $\{W_1, \ldots, W_{n-1}\}$ para T'. Por conveniencia, definamos $W_0 = \{0\}$.

Definamos para todo $1 \leq i \leq n$

$$V_i = V_1 + W_{i-1}.$$

Vamos a demostrar que $V_1, \ldots, V_n$ es un abanico para T.

En efecto, como $W_1, \ldots, W_{n-1}$ es un abanico, tenemos que $W_{i-1} \subseteq W_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, luego para $1 \leq i < n$ tenemos que

$$V_i = V_1 + W_{i-1} \subseteq V_1 + W_i = V_{i+1}.$$

Como $V_1 \cap W = \{0\}$ y W_1 es un subespacio de W, tenemos que

$$\dim(V_1 + W_i) = \dim(W_{i-1}) + \dim(V_1) = (i-1) + 1 = i.$$

Solo falta demostrar que V_i es T-invariante. El caso $i = 1$ es directo pues v_i es valor propio de T. Para $i > 1$ notamos que T puede descomponerse del modo siguiente

$$T = \mathrm{id}\, T = (P_{V_1} + P_W)T = P_{V_1}T + T'.$$

Sea $v \in V_i$ con $i > 1$. Debemos analizar los vectores $P_{V_1}Tv$ y $T'v$.

Por un lado tenemos que $P_{V_1}(Tv) \subseteq V_1$. Como $V_1 \subseteq V_i$, tenemos que $P_{V_1}Tv \in V_i$.

Para analizar $T'v$, notemos que por hipótesis podemos escribir $v = cv_1 + w_i$ con $c \in \mathbb{C}$ y $w_i \in W_{i-1}$. Luego $T'v = cT'(v_1) + T'(w_i)$.

Como v_1 es vector propio T asociado a λ_1, tenemos que

$$T'(v_1) = P_W(T(v_1)) = \lambda P_W(v_1) = 0.$$

Por otro lado, como $W_1, \dots, W_{n-1}$ es abanico, tenemos que W_{i-1} es T'-invariante, luego $T'(w_i) \in W_{i-1} \subseteq V_i$. Concluimos que $T'v \in V_i$

Juntando ambos resultados anteriores, obtenemos que $T(v) \in V_i$, luego V_i es T-invariante. Esto completa la demostración. □

Corolario 2.4.10: Existencia de triangularización

Sea $n \geq 1$. Toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es triangulable sobre $\mathbb{C}$.

Demostración. Por el teorema anterior, existe un abanico $V_1, \dots, V_n$ para el operador definido por A. Luego si P es la matriz cuyas columnas corresponden a los vectores de una base de abanico para $V_1, \dots, V_n$ tenemos que $P^{-1}AP$ es la representación de A en la base de abanico y por lo tanto triangular superior. □

Ejemplo 2.4.11

Las matrices con coeficientes en $\mathbb{R}$ en general no son triangularizables sobre $\mathbb{R}$. Considere

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si A fuese triangularizable, entonces debería existir un abanico para A y en particular un espacio invariante de dimensión 1. Supongamos que V es un espacio invariante con $\dim(V) = 1$, luego todos sus elementos son múltiplos de un $v \in \mathbb{R}^2$ no nulo.

Como V es invariante, tenemos que $Av \in V$ y por lo tanto $Av = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, luego λ es valor propio de A. Como A no admite valores propios reales, concluimos no existen espacios invariantes de dimensión 1 y que en consecuencia A no es triangularizable.

Los siguientes ejercicios permiten extender resultados de matrices diagonalizables a todas las matrices sobre $\mathbb{C}$.

Ejercicio 2.4.12

Sea $n \geq 1$. Muestre que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y sus valores propios (repetidos según multiplicidad algebraica) son $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, entonces

1. $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$.
2. $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Donde $\operatorname{tr}(A)$ denota la traza de A.

Indicación: recuerde que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ y $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Observación 2.7. El Teorema 2.4.9 es válido de manera general para un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ algebraicamente cerrado.

2.5. El teorema de Cayley-Hamilton

Sea $p \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio de la forma $p = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Podemos evaluar el polinomio p en la matriz A para obtener nuevamente una matriz en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la manera siguiente

$$p(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k = c_n A^n + \cdots + c_2 A^2 + c_1 A + c_0 I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

De manera más general, si $T\colon E \to E$ es un operador, podemos obtener un nuevo operador evaluando el polinomio en T

$$p(T) = \sum_{k=0}^{n} c_k T^k = c_n T^n + \cdots + c_2 T^2 + c_1 T + c_0 \,\mathrm{id} \in \mathcal{L}(E, E).$$

Nuestro objetivo es estudiar una conexión interesante entre el polinomio característico de un operador y el operador que se obtiene al evaluar el polinomio característico en sí mismo

Teorema 2.5.1: Cayley-Hamilton

Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada sobre $\mathbb{K}$. Sea $p_A \in \mathbb{K}[x]$ el polinomio característico de A. Entonces

$$p_A(A) \text{ es la matriz nula.}$$

Como todo operador $T\colon E \to E$ en un espacio de dimensión finita puede representarse como una matriz sobre la base canónica, lo anterior puede interpretarse como

$$p_T(T) \text{ es el operador nulo para todo operador } T \in \mathcal{L}(E, E).$$

Observación 2.8. Una prueba incorrecta del teorema anterior es la siguiente. Recordemos que el polinomio característico se define como

$$p_A(t) = \det(tI - A).$$

Luego podríamos simplemente "evaluar"

$$p_A(A) = \det(AI - A) = \det(0) = 0.$$

Lo anterior no hace ningún sentido. El lado izquierdo de la igualdad es una matriz n por n en tanto que el lado derecho es un escalar. El término de la derecha de la expresión $p_A(t) = \det(tI - A)$ solo hace sentido en tanto que polinomio en la variable t o al evaluarlo en un escalar, pero no al evaluarlo en una matriz.

Ejemplo 2.5.2

Supongamos que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz diagonalizable y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de vectores propios de A. Denotemos por $p_A(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ el polinomio característico de A. Tenemos que si para todo $1 \leq i \leq n$ el valor propio asociado a v_i es λ_i entonces

$$p_A(A)v_i = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k v_i = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda_i^k v_i = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k \lambda_i^k\right) v_i = p_A(\lambda_i) v_i = 0 v_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$, obtenemos que A es la matriz nula. Esto muestra que el teorema de Cayley-Hamilton es cierto para matrices diagonalizables.

Lamentablemente el argumento anterior no puede utilizarse de manera general, puesto que si una matriz no es diagonalizable, entonces no admite una base de vectores propios. Sin embargo podemos utilizar que toda matriz en un cuerpo algebraicamente cerrado admite una base de abanicos.

Demostración del Teorema 2.5.1. Supongamos primero que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Por el teorema de la existencia de Abanicos tenemos que el operador asociado a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admite una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ tal que si $V_i = \langle v_1, \ldots, v_i\rangle$ entonces $V_1, \ldots, V_n$ es un abanico de A. Luego existe una matriz triangular superior

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

que representa a A en la base $v_1, \ldots, v_n$, es decir, tal que existe una matriz invertible P tal que $A = PTP^{-1}$ y $Pv_i = e_i$. Notemos que el polinomio característico de A está dado por

$$p_A(t) = \prod_{i=1}^{n}(t - a_{i,i}).$$

Como las únicas matrices que aparecen en el polinomio característico evaluado en A son potencias de A, los términos $(A - a_{i,i}I)$ conmutan entre sí.

Denotemos el vector de ceros en $\mathbb{C}^n$ como $\vec{0}$. Debemos demostrar que $p_A(A)$ es la matriz nula. Para ello, basta mostrar que $\prod_{\ell=1}^{i}(A - a_{\ell,\ell}I)v_i = \vec{0}$ para todo $1 \le i \le n$. Procedamos por inducción en i. El caso $i = 1$ es sencillo puesto que

$$(A - a_{1,1}I)v_1 = PTP^{-1}v_1 - a_{1,1}v_1 = PTe_1 - a_{1,1}v_1 = a_{1,1}P(e_1) - a_{1,1}v_1 = \vec{0}.$$

Supongamos $i > 1$ y que $\prod_{\ell=1}^{j}(A - a_{\ell,\ell}I)v_j = \vec{0}$ para todo $1 \le j < i$. Notemos que

$$(A - a_{i,i})v_i = Av_i - a_{i,i}v_i = \sum_{\ell=1}^{i} a_{\ell,i}v_\ell - a_{i,i}v_i = \sum_{\ell=1}^{i-1} a_{\ell,i}v_\ell \in V_{i-1}.$$

Luego podemos escribir

$$\prod_{\ell=1}^{i}(A - a_{\ell,\ell}I)v_i = \left(\prod_{\ell=1}^{i-1}(A - a_{\ell,\ell}I)\right)(A - a_{i,i}I)v_i = \sum_{m=1}^{i-1} a_{m,i}\left(\prod_{\ell=1}^{i-1}(A - a_{\ell,\ell}I)\right)v_m = \vec{0}.$$

Reuniendo lo anterior, tenemos que para todo $1 \le i \le n$

$$P_A(A)v_i = \vec{0}.$$

Luego $P_A(A)$ es la matriz nula. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, basta notar que el polinomio característico de T tiene coeficientes en $\mathbb{R}$. Usando que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ podemos usar el argumento anterior para mostrar que $p_T(T)$ es el operador nulo. □

Observación 2.9. El teorema de Cayley-Hamilton es válido en cualquier cuerpo (de hecho, en cualquier anillo conmutativo). En la demostración utilizamos el teorema de existencia de abanicos que requiere un cuerpo algebraicamente cerrado. Hay un teorema que muestra que todo para todo cuerpo existe un cuerpo que lo contiene y que es algebraicamente cerrado, pero su prueba utiliza el axioma de elección y está fuera de los objetivos de este curso.

Ejercicio 2.5.3

Use el teorema de Cayley-Hamilton para mostrar que si todos los valores propios de una matriz A son 0, entonces A es nilpotente.

Ejercicio 2.5.4

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sin calcular explícitamente la inversa de A, muestre que

$$A^{-1} = \frac{A - 5I}{2}.$$

Ejercicio 2.5.5

Encuentre el error en el argumento siguiente:
Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su polinomio característico es $p_A(t) = t^2 - 2t$. Por el teorema de Cayley-Hamilton, tenemos que $A^2 = 2A$. Luego $A = 2I$.

Ejemplo 2.5.6

Sea γ un polinomio en $\mathbb{C}[x]$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y p el polinomio característico de A. Al dividir γ por p obtenemos polinomios $q, r \in \mathbb{C}[x]$ tal que $0 \leq \deg(r) < \deg(p)$ tales que

$$\gamma = q \cdot p + r,$$

Por el teorema de Cayley-Hamilton, tenemos que $p(A)$ es la matriz nula, luego

$$\gamma(A) = q(A)p(A) + r(A) = r(A).$$

Luego $\gamma(A) = r(A)$.

Ejercicio 2.5.7

Calcule A^{99} para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Indicación: calcule el resto que se obtiene al dividir el polinomio x^{99} por el polinomio característico de A y evalúe.

Ejercicio 2.5.8: [difícil]

Una función $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ se dice analítica si existen escalares $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$f(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k A^k \text{ para toda } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Un ejemplo de función analítica es la función exponencial. Muestre que $f(A)$ puede expresarse como un polinomio de grado a lo más $n-1$ sobre A.

2.6. Ideales principales y el polinomio minimal

Definiremos un polinomio que es de especial importancia para una matriz y que está relacionado de manera importante con el teorema de Cayley-Hamilton. Para dar un contexto que motive su definición, será necesario estudiar algunas propiedades de los anillos.

Un anillo conmutativo es una estructura $(R, +, \cdot)$ tal que $(R, +)$ es un grupo abeliano, $(R, \cdot)$ es un monoide abeliano (es decir, como un grupo pero sin tener necesariamente inversos) y la multiplicación distribuye con respecto a la suma.

Todo cuerpo es automáticamente un anillo, pero los anillos no necesariamente son cuerpos. Por ejemplo $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un anillo pero no es cuerpo, ya que hay elementos no nulos que no son invertibles para la multiplicación.

Nos enfocaremos en un anillo que hemos estado utilizando constantemente en el curso

Ejemplo 2.6.1

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. El conjunto de polinomios $\mathbb{K}[x]$ de una variable sobre $\mathbb{K}$ es un anillo conmutativo con la suma y la multiplicación.

Definición 2.6.2: Ideal

Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo. Un conjunto $I \subseteq R$ se denomina **ideal** si satisface

1. $(I, +)$ es un subgrupo de $(R, +)$.
2. $cx \in I$ para todo $c \in R$, $x \in I$.

Los ideales no son vacíos ya que $(I, +)$ es un subgrupo de $(R, +)$, luego debe tener al menos un elemento neutro.

Ejemplo 2.6.3

Algunos ejemplos de ideales son los siguientes.

1. El ideal trivial $I = \{0\}$ en cualquier anillo $(R, +, \cdot)$.
2. El ideal $I = R$ en cualquier anillo $(R, +, \cdot)$.
3. El ideal de los múltiplos de 3, $I = \{3k : k \in \mathbb{Z}\}$ en $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.
4. El ideal de los polinomios pares

$$I = \{p \in \mathbb{Z}[x] : p = 2q \text{ para algún } q \in \mathbb{Z}[x]\}.$$

Donde $(\mathbb{Z}[x], +, \cdot)$ es el anillo de polinomios con coeficientes enteros.

Un ejemplo menos evidente que será de especial relevancia es el siguiente.

Ejemplo 2.6.4

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz. El conjunto

$$\text{Ann}(A) = \{p \in \mathbb{K}[x] : p(A) \text{ es la matriz nula}\},$$

es un ideal denominado el **anulador** de A.

El teorema de Cayley-Hamilton nos dice que el polinomio característico de una matriz A pertenece a su anulador.

Una manera natural de definir ideales es tomar uno o más elementos de un anillo $a_1, \ldots, a_n$ y considerar todos los elementos del anillo que pueden obtenerse multiplicando $a_1, \ldots, a_n$ por elementos del anillo y sumándolos. Eso motiva la definición siguiente.

Definición 2.6.5: Ideal principal y generadores

Sea $(R, +, \cdot)$ un anillo e $I \subseteq R$ un ideal. Decimos que I es **generado** por $a_1, \ldots, a_n \in I$ si todo elemento de I puede escribirse de la forma

$$\sum_{k=1}^{n} c_i a_i, \text{ donde } c_i \in R.$$

Si I es generado por un único elemento $a \in R$, decimos que es un **ideal principal**.

Ejemplo 2.6.6

1. El ideal trivial $I = \{0\}$ está generado por el neutro aditivo 0.
2. El ideal R está generado por la identidad multiplicativa 1.
3. El ideal de los múltiplos de $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ está generado por $|k|$.
4. El ideal de los polinomios pares en $\mathbb{Z}[x]$ está generado por el polinomio $p = 2$.

Definición 2.6.7: Dominio de ideales principales

Un anillo $(R, +, \cdot)$ donde todo ideal es principal se denomina un **dominio de ideales principales**.

En inglés dominio de ideales principales se escribe usualmente PID (principal ideal domain).

Ejercicio 2.6.8

Muestre que $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ es un dominio de ideales principales.

Ejercicio 2.6.9

Mostrar que el anillo $\mathbb{Z}[x]$ de los polinomios con coeficientes en $\mathbb{Z}$ no es un dominio de ideales principales. *Indicación:* considerar el ideal generado por los polinomios $p = 2$ y $q = x$.

Proposición 2.6.10: $\mathbb{K}[x]$ es PID

Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo. Entonces el anillo $\mathbb{K}[x]$ es un dominio de ideales principales.

Demostración. Sea I un ideal. Si $I = \{0\}$ entonces I está generado por 0. Si no, existe $p \neq 0$ tal que $p \in I$ y su grado $\deg(p)$ es el más pequeño posible. Afirmamos que p genera I.

Si no fuese cierto, existiría $q \in I$ tal que $q \neq sp$ para todo $s \in R$. Entonces podemos dividir q por p y tenemos y obtener un resto no nulo, es decir podemos escribir

$$q = sp + r.$$

Donde $s, r \in R$, $r \neq 0$ y $\deg(r) < \deg(p)$. Como $q \in I$ y $p \in I$, entonces $-sp \in I$ y tenemos que $q - sp = r \in I$. Luego existe $r \in I$ no nulo con $\deg(r) < \deg(p)$, contradiciendo la elección de p. □

Observación 2.10. Si $I \neq \{0\}$ es un ideal en un anillo de polinomios $\mathbb{K}[x]$ sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, entonces su generador es único salvo multiplicación por un polinomio constante.

En particular, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ el ideal

$$\operatorname{Ann}(A) = \{p \in \mathbb{K}[x] : p(A) = 0\},$$

es principal. Eso quiere decir que existe un polinomio mónico $p_{\min} \in \mathbb{K}[x]$ tal que si $p(A) = 0$ entonces $p_{\min}$ divide a p.

Definición 2.6.11: Polinomio minimal

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. el **polinomio minimal** de A es el único polinomio mónico $p_{\min}$ que divide a todo polinomio que anula a A.

Observación 2.11. Por el teorema de Cayley-Hamilton, sabemos que el polinomio característico anula a A, luego $\operatorname{Ann}(A) \neq \{0\}$. En particular $p_{\min} \neq 0$. De hecho, una forma equivalente del teorema de Cayley-Hamilton es que el polinomio minimal divide al polinomio característico $p_A(t)$.

$$p_A(t) = p_{\min}(t)q(t) \text{ para algún polinomio } q \in \mathbb{K}[x].$$

Ejercicio 2.6.12

Sea $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matriz identidad. Calcule su polinomio característico y polinomio minimal. ¿para qué valores de n coinciden?

Ejercicio 2.6.13

Sea P una proyección. Muestre que el polinomio $p(x) = x(x-1)$ anula a P. ¿Cuando es p su polinomio minimal?

Ejercicio 2.6.14

Muestre que si todos los valores propios de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son distintos, entonces el polinomio minimal coincide con el polinomio característico.

Ejercicio 2.6.15

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz a coeficientes reales tal que $A^2 + I = 0$. Muestre que n es par.

2.7. El teorema de descomposición prima

Sea $T \colon E \to E$ un operador. Recordemos que un subespacio $V \subseteq E$ es T-invariante si $T(V) \subseteq V$.

Estudiaremos un resultado que nos permitirá utilizar el polinomio minimal para descomponer el espacio como suma directa de subespacios invariantes. Esto nos dará una forma explícita de calcular el polinomio minimal, y una nueva interpretación de éste.

Recordemos que vimos que si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces el espacio propio $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ es un espacio invariante para el operador definido por A. El siguiente ejemplo generaliza lo anterior.

Ejemplo 2.7.1

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $p \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio arbitrario. El espacio $\mathrm{Ker}(p(A))$ es invariante. En efecto, si $v \in \mathrm{Ker}(p(A))$ entonces $p(A)v = 0$. Luego

$$0 = p(A)v = Ap(A)v = p(A)(Av).$$

De donde se deduce que $Av \in \mathrm{Ker}(p(A))$. Notemos que el caso de un espacio propio corresponde a tomar el monomio $p = (x - \lambda)$.

Por definición, sabemos que el polinomio minimal $p_{\min}$ de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la anula. Luego $\mathrm{Ker}(p_{\min}(A)) = \mathbb{K}^n$. Lo que haremos será estudiar los diferentes factores de $p_{\min}$ de manera separada mostrando que $\mathbb{K}^n$ puede descomponerse como suma de núcleos de estos factores. Antes de ello, necesitaremos demostrar una versión de la identidad de Bezout para polinomios.

Definición 2.7.2: Máximo común divisor de polinomios

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Decimos que un polinomio mónico $d \in \mathbb{K}[x]$ es el **máximo común divisor** de $p, q \in \mathbb{K}[x]$ si d es el polinomio de grado máximo que divide simultáneamente a p y q. Decimos que p y q son **relativamente primos** si su máximo común divisor es 1.

Observación 2.12. Notemos que si d divide simultáneamente a p y q, entonces cd también lo hace para toda constante no nula $c \in \mathbb{K}$. Por esto pedimos que el máximo común divisor sea un polinomio mónico.

Proposición 2.7.3: Identidad de Bézout para polinomios

Sean $p, q \in \mathbb{K}[x]$ no nulos y d su máximo común divisor. Entonces existen $h, k \in \mathbb{K}[x]$ tales que

$$d(x) = p(x)h(x) + q(x)k(x).$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos

$$S = \{t(x) = p(x)h(x) + q(x)k(x) : h, k \in \mathbb{K}[x], t \text{ es un polinomio mónico no nulo}\}.$$

Claramente S es un conjunto no vacío pues como $p \neq 0$ existe una constante $c \in \mathbb{K}$ tal que $cp \in S$. Sea $t^* = p(x)h^*(x) + q(x)k^*(x)$ un polinomio de grado mínimo en S. Mostraremos que t^* es el máximo común divisor de t^*.

Por un lado, dividiendo p por t^* tenemos que existen $s, r \in \mathbb{K}[x]$ tal que $\deg(r) < \deg(t^*)$ tal que

$$p(x) = t^*(x)s(x) + r(x).$$

Luego

$$r(x) = p(x) - t^*(x)s(x) = p(x) - s(x)(p(x)h^*(x) + q(x)k^*(x)) = p(x)(1 - s(x)h^*(x)) + q(x)k^*(x)s(x).$$

Como $\deg(r) < \deg(t^*)$, tenemos que $r \notin S$ y luego $r = 0$. Obtenemos que t^* divide a p.

Con un argumento análogo, se obtiene que t^* divide a q. Supongamos ahora que $f \in \mathbb{K}[x]$ es un divisor a la vez de p y q, luego podemos escribir $p(x) = f(x)p'(x)$ y $q(x) = f(x)q'(x)$ para algunos $p', q' \in \mathbb{K}[x]$. Luego

$$t^*(x) = f(x)p'(x)h^*(x) + f(x)q'(x)k^*(x) = f(x)(p'(x)h^*(x) + q'(x)k^*(x)).$$

Luego f divide a t^*. Concluimos que t^* es el máximo común divisor de p y q. □

Con la identidad anterior podemos demostrar el siguiente resultado que permite descomponer un espacio en dos espacios invariantes utilizando alguna factorización relativamente prima de un polinomio anulador.

Lema 2.7.4

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $T\colon E \to E$ un operador y $p \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio tal que $p(T) = 0$. Supongamos que p puede escribise como multiplicación de dos polinomios $p = fg$ con $f, g \in \mathbb{K}[x]$ relativamente primos. Luego

$$\mathbb{K}^n = \operatorname{Ker}(f(T)) \oplus \operatorname{Ker}(g(T)).$$

Demostración. Como f y g no tienen divisores en común, por la identidad de Bezout tenemos que existen polinomios $j, h \in \mathbb{K}[x]$ tal que

$$j(x)f(x) + h(x)g(x) = 1.$$

Evaluando en T obtenemos que

$$j(T)f(T) + h(T)g(T) = I.$$

Sea $v \in \mathbb{K}^n$, luego

$$j(T)f(T)v + h(T)g(T)v = v$$

Notemos que $j(T)f(T)v \in \operatorname{Ker}(g(T))$, esto dado que

$$g(T)j(T)f(T)v = j(T)(g(T)f(T))v = j(T)p(T)v = 0.$$

Similarmente, $h(T)g(T) \in \operatorname{Ker}(f(T))$. Esto demuestra que $\mathbb{K}^n$ es suma de los espacios $\operatorname{Ker}(f(T))$ y $\operatorname{Ker}(g(T))$.

Mostremos que la suma es directa. Para ello mostraremos que la descomposición es única. Supongamos $v = u_1 + u_2$ con $u_1 \in \operatorname{Ker}(f(T))$ y $u_2 \in \operatorname{Ker}(g(T))$. Multiplicando por $j(T)f(T)$ obtenemos

$$j(T)f(T)v = j(T)f(T)u_1 + j(T)f(T)u_2 = j(T)f(T)u_2 = u_2$$

La última igualdad sale de la ecuación $j(T)f(T)u_2 + h(T)g(T)u_2 = u_2$. Luego u_2 está completamente determinado por v. Del mismo modo, multiplicando $v = u_1 + u_2$ por $h(T)g(T)$ obtenemos que $u_1 = h(T)g(T)v$. Luego la descomposición es única. □

Recordemos que el anulador de T es el ideal de polinomios dado por

$$\operatorname{Ann}(T) = \{p \in \mathbb{K}[x] : p(T) = 0\}.$$

Teorema 2.7.5: Descomposición prima

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $T\colon E \to E$ un operador y $p \in \operatorname{Ann}(T)$. Supongamos que p se escribe como

$$p(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \dots (t - \lambda_k)^{m_k}$$

Entonces E es la suma directa de los subespacios $\mathrm{Ker}((T-\lambda_i I)^{m_i})$

DEMOSTRACIÓN. Procedamos por inducción en el número de términos de la forma $(t-\lambda_i)^{m_i}$. Si hay un solo término no hay nada que probar. Supongamos que el resultado es válido para $n-1$ términos. Por el Lema 2.7.4, tenemos que

$$E = \mathrm{Ker}((T-\lambda_1 I)^{m_1}) \oplus \mathrm{Ker}((T-\lambda_2 I)^{m_2} \dots (T-\lambda_k I)^{m_k})$$

Llamemos $W = \mathrm{Ker}((T-\lambda_2 I)^{m_2} \dots (T-\lambda_k I)^{m_k})$. Por definición el polinomio $(t-\lambda_2)^{m_2} \dots (t-\lambda_k)^{m_k})$ anula a W y tiene $n-1$ términos. Por hipótesis inductiva tenemos que $W = \mathrm{Ker}_W((T-\lambda_2 I)^{m_2}) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}_W((T-\lambda_k I)^{m_k})$ donde Ker_W denota el núcleo en el subespacio W, es decir

$$\mathrm{Ker}_W((T-\lambda_i I)^{m_i}) = \{w \in W : (T-\lambda_i I)^{m_i} w = 0\}.$$

De aquí se sigue que

$$E = \mathrm{Ker}((T-\lambda_1 I)^{m_1}) \oplus \mathrm{Ker}_W((T-\lambda_2 I)^{m_2} \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}_W((T-\lambda_k I)^{m_k}.$$

Basta demostrar que $\mathrm{Ker}_W((T-\lambda_i I)^{m_i} = \mathrm{Ker}((T-\lambda_i I)^{m_i})$ para todo $2 \leq i \leq k$.

Por un lado, es claro que $\mathrm{Ker}_W((T-\lambda_i I)^{m_i} \subseteq \mathrm{Ker}((T-\lambda_i I)^{m_i})$. Por otro lado, si $v \in \mathrm{Ker}((T-\lambda_i I)^{m_i})$ luego $(T-\lambda_i I)^{m_i} v = 0$ para algún $i \in \{2, \dots, k\}$. Luego

$$(T-\lambda_2 I)^{m_2} \dots (T-\lambda_k I)^{m_k} v = 0.$$

Por lo tanto $v \in W$. Esto muestra que $\mathrm{Ker}((T-\lambda_i I)^{m_i} \subseteq \mathrm{Ker}_W((T-\lambda_i I)^{m_i})$. □

Observación 2.13. En los dos resultados anteriores no asumimos que la dimensión de E fuese finita. El resultado es válido inclusive para espacios vectoriales de dimensión infinita.

El teorema de descomposición prima nos da una manera nueva de calcular los exponentes del polinomio minimal: para un valor propio λ el exponente de $(t-\lambda)$ corresponderá al entero $n \geq 1$ más pequeño tal que $\mathrm{Ker}((T-\lambda I)^n) = \mathrm{Ker}((T-\lambda I)^{n+1})$.

Corolario 2.7.6: Forma del polinomio minimal

Sea λ un valor propio de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. El exponente m_i de un término $(t-\lambda)^{m_i}$ en el polinomio minimal de A es el entero positivo más pequeño tal que

$$\mathrm{Ker}((A-\lambda I)^{m_i}) = \mathrm{Ker}((A-\lambda I)^{m_i+1}).$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ los valores propios de A con multiplicidad algebraica $n_1, \dots, n_k$ respectivamente. Para $1 \leq i \leq k$ definamos m_i como el entero positivo más pequeño tal que

$$\mathrm{Ker}((A-\lambda I)^{m_i}) = \mathrm{Ker}((A-\lambda I)^{m_i+1}).$$

Por el teorema de Cayley-Hamilton, sabemos que p_{min} divide al polinomio característico. Luego existen valores $r_i \leq n_i$ tales que

$$p_{\mathrm{min}}(t) = \prod_{i=1}^{k} (t-\lambda_i)^{r_i}.$$

Por el Teorema 2.7.5, obtenemos que

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}((A-\lambda_1 I)^{r_i}) \oplus \dots \oplus \mathrm{Ker}((A-\lambda_k I)^{r_k}),$$

lo cual implica que

$$n = \sum_{i=1}^{k} \dim(\mathrm{Ker}((A - \lambda_i I)^{r_i})).$$

En particular, $\dim(\mathrm{Ker}((A-\lambda_i I)^{r_i+1})) = \dim(\mathrm{Ker}((A-\lambda_i I)^{r_i}))$ ya que si aumentamos el exponente r_i, el nuevo polinomio también anula a A. De esto obtenemos que $\mathrm{Ker}((A-\lambda_i I)^{r_i}) = \mathrm{Ker}((A-\lambda_i I)^{r_i+1})$ por lo cual $r_i \geq m_i$ para todo $1 \leq i \leq k$.

Consideremos el polinomio

$$q(t) = \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

Por definición de m_i, tenemos que $\mathrm{Ker}((A-\lambda I)^{m_i}) = \mathrm{Ker}((A-\lambda I)^{r_i})$, luego todo $x \in E$ puede escribise de la forma $x = v_1 + \cdots + v_k$ con $v_i \in \mathrm{Ker}((A - \lambda I)^{m_i})$. En consecuencia tenemos que

$$q(A)v = \sum_{i=1}^{k} q(A)v_i = 0.$$

Luego $q(A) \in \mathrm{Ann}(A)$, de donde obtenemos que el polinomio minimal p_{min} divide a q y luego $r_i \leq m_i$ para todo $1 \leq i \leq k$. Concluimos que q es el polinomio minimal. $\square$

Observación 2.14. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con polinomio minimal dado por

$$p_{\text{min}}(t) = \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

Sea $d_i = \dim(\mathrm{Ker}((A-\lambda_i I)^{m_i}))$. Si construimos una base de $\mathbb{C}^n$ como la unión de las bases $\{v_{i,1}, \ldots, v_{i,d_i}\}$ de cada espacio $\dim(\mathrm{Ker}((A - \lambda_i I)^{m_i}))$. Entonces el operador determinado por A en esa base es una matriz por bloques de la forma siguiente

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & 0_{d_1,d_2} & \ldots & 0_{d_1,d_k} \\ \hline 0_{d_2,d_1} & B_2 & \ldots & 0_{d_2,d_k} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline 0_{d_k,d_1} & 0_{d_k,d_2} & \ldots & B_k \end{array}\right).$$

Donde $0_{a,b}$ es la matriz de ceros con a filas y b columnas y B_i es la matriz cuadrada de tamaño d_i que representa a la matriz A en el subespacio $\mathrm{Ker}((A - \lambda_i I)^{m_i})$ sobre la base $\{v_{i,1}, \ldots, v_{i,d_i}\}$.

En palabras más simples, A siempre es semejante a una matriz por bloques de la forma anterior.

Ejercicio 2.7.7

Calcule el polinomio minimal de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Corolario 2.7.8: Caracterización de matriz diagonalizable

Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es diagonalizable sobre $\mathbb{C}$ si y solamente si el exponente de cada término $(t - \lambda_i)^{m_i}$ en su polinomio minimal es $m_i = 1$.

Demostración. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ los valores propios de A. Supongamos que el polinomio minimal de A se factoriza en polinomios primos distintos.

$$p_{\min}(t) = (t - \lambda_1) \dots (t - \lambda_k).$$

Luego por el teorema de descomposición, tenemos que

$$\mathbb{C}^n = \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker}(A - \lambda_k I)^{m_k}.$$

Si $m_i = 1$ para todo $1 \leq i \leq k$, entonces como cada espacio $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)$ es por definición el espacio propio asociado al vector propio λ_i, tenemos que A es suma directa de sus espacios propios. Esto implica que es diagonalizable.

Inversamente, si A es diagonalizable, tenemos que A es suma directa de sus espacios propios $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)$ lo cual implica que $n = \sum_{i=1}^{k} \dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I))$ y por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{k} \dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)) = \sum_{i=1}^{k} \dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)^{m_i}).$$

Como $\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I) \subseteq \operatorname{Ker}((A - \lambda_i I)^{m_i})$ tenemos que $\dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)) \leq \dim(\operatorname{Ker}((A - \lambda_i I)^{m_i}))$. Por lo anterior tenemos que

$$\dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda_i I)) = \dim(\operatorname{Ker}((A - \lambda_i I)^{m_i})).$$

Del corolario anterior deducimos que $m_i = 1$. $\square$

Ejercicio 2.7.9

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz nilpotente. Muestre que A es diagonalizable si y solamente si A es la matriz nula.

Ejercicio 2.7.10

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz y $p \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio tal que $p(A) = 0$. Supongamos que p puede escribirse como $p = fg$ con $f, g \in \mathbb{C}[x]$ dos polinomios sin divisores comunes de grado mayor o igual a 1. Muestre que

$$\operatorname{Ker}(f(A)) = \operatorname{Im}(g(A)).$$

Ejercicio 2.7.11

Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $T\colon V \to V$ un operador. Suponga que existen espacios vectoriales T-invariantes $V_1, \dots, V_k$ tales que

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k.$$

Muestre que si $f \in \mathbb{K}[x]$ es un polinomio arbitrario, entonces

$$f(T)V = f(T)V_1 \oplus \cdots \oplus f(T)V_k.$$

Ejercicio 2.7.12: [Difícil]

Considere una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}^n x} f + c_{n-1} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}^{n-1} x} f + \cdots + c_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f + c_0 f = 0. \tag{2.1}$$

Donde $c_i \in \mathbb{R}$. Definamos el espacio vectorial E de las funciones $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciables que satisfacen la ecuación anterior. Notemos que $D\colon E \to E$ dado por $D(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$ es un operador en este espacio.

Definamos

$$p(t) = t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots + c_1 t + c_0,$$

1. Muestre por inducción en m que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, $f \in E$ y $m \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$(D - \lambda I)^m f = \mathrm{e}^{\lambda x} D^m (\mathrm{e}^{-\lambda x} f).$$

   Indicación: use la regla de la cadena. Si no sabe derivar funciones complejas puede suponer que $\lambda \in \mathbb{R}$, aunque el resultado es válido también si $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. Del punto anterior se obtiene que $f \in \operatorname{Ker}((D - \lambda I)^m)$ si y solamente si $D^m(\mathrm{e}^{-\lambda x} f(x)) = 0$. Pruebe que $\mathrm{e}^{-\lambda x} f(x)$ es un polinomio de grado a lo más $m - 1$.
3. Concluya que $\operatorname{Ker}((D - \lambda I)^m)$ está generado por el conjunto

$$\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{m-1} e^{\lambda x}\}.$$

4. Muestre que $p \in \operatorname{Ann}(D)$, es decir, que $p(D)$ es el operador nulo. Concluya que el polinomio minimal de D divide a p.
5. Escribamos el polinomio minimal de D de la forma

$$p_{\min}(t) = \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

   Donde λ_i son las raíces de p. Usando el teorema de descomposición prima, muestre que el espacio de soluciones de la ecuación (1) está generado por la base

$$\bigcup_{i=1}^{k} \{e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \ldots, x^{m_i - 1} e^{\lambda_i x}\}.$$

6. Concluya que el espacio de soluciones de (1) tiene dimensión finita igual a la suma de los exponentes del polinomio minimal de D.

2.8. La forma canónica de Jordan

Recordemos que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tiene un polinomio minimal dado por

$$p_{\min}(t) = \prod_{i=1}^{k} (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

Entonces el operador determinado por A es semejante a una matriz por bloques de la forma

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B_2 & \ldots & \mathbf{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & B_k \end{array}\right).$$

Donde los $\mathbf{0}$ representan bloques de ceros y B_i son matrices cuadradas que representan a la matriz A en el subespacio invariante $\operatorname{Ker}((A-\lambda_i I)^{m_i})$ sobre alguna base de éste. Nuestro objetivo es describir una base de $\operatorname{Ker}((A-\lambda_i I)^{m_i})$ que facilita la representación de los bloques B_i y simplifica los cálculos.

Definición 2.8.1: Vector y espacio propio generalizado

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $T\colon E \to E$ un operador y $\lambda \in \mathbb{K}$. Decimos que un vector $x \in E$ no nulo es **vector propio generalizado** de orden $m \geq 1$ asociado a λ si

$$(T-\lambda\,\mathrm{id})^m x = 0 \text{ pero } (T-\lambda\,\mathrm{id})^{m-1} x \neq 0.$$

El subespacio generado por todos los vectores propios generalizados asociados a λ se denomina **espacio propio generalizado**.

Observación 2.15. El teorema de representación afirma que todo espacio vectorial de dimensión finita es suma directa de sus espacios propios generalizados.

Observación 2.16. Un vector propio generalizado de orden 1 es exactamente un vector propio. Más generalmente, si v es un vector propio generalizado de orden m asociado de λ entonces $(A-\lambda I)^{m-1}v$ es un vector propio de λ.

Observación 2.17. Sea m_i el exponente de un término $(t-\lambda_i)^{m_i}$ en el polinomio minimal de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Luego el espacio propio generalizado asociado a λ_i es $\operatorname{Ker}((A-\lambda_i I)^{m_i})$. Si $m_i = 1$ el espacio propio generalizado coincide con el espacio propio.

Lema 2.8.2

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y v un vector propio generalizado de orden m asociado a λ. Entonces el conjunto

$$\{v, (A-\lambda I)v, (A-\lambda I)^2 v, \dots (A-\lambda I)^{m-1}v\},$$

es linealmente independiente.

Demostración. Denotemos $B = (A-\lambda I)$. Supongamos que el resultado es falso, entonces existen constantes $c_0, \dots, c_{m-1} \in \mathbb{K}$ tales que

$$c_0 v + c_1 Bv + \cdots + c_{m-1}B^{m-1}v = 0.$$

Sean $f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} c_k x^k \in \mathbb{K}[x]$ y $g(t) = x^m$. Luego tenemos que $f(B)v = 0$. Como v es vector propio generalizado de orden m, tenemos que $g(B)v = B^m v = 0$.

Sea h el divisor común de grado máximo de $f y g$. Por la identidad de Bezout existen polinomios $p, q \in \mathbb{K}[x]$ tales que

$$h(x) = p(x)f(x) + q(x)g(x).$$

De donde obtenemos que

$$h(B)v = p(B)f(B)v + q(B)g(B)v = 0.$$

Por lo tanto $h(B)v = 0$. Como h divide a g, entonces $h(x) = x^r$ para algún $0 \leq r \leq m$. Por otro lado, como h divide a f, debe ser de grado a lo más $m-1$. Luego existe $0 \leq r \leq m-1$ tal que $B^r v = (A-\lambda I)^r v = 0$, lo cual contradice que v es vector propio generalizado de orden m. $\square$

Definición 2.8.3: Espacio cíclico

Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $T\colon V \to V$ un operador. Decimos que V es un espacio **cíclico** si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ y un vector propio generalizado $v \in V$ asociado a λ tal que

$$\{v, (A-\lambda I)v, (A-\lambda I)^2 v, \dots (A-\lambda I)^{m-1} v\} \text{ es base de } V,$$

Observación 2.18. Notemos que si v es un vector propio generalizado de orden m asociado a λ para una matriz A, entonces para todo $0 \le i \le m-1$ tenemos que

$$A(A-\lambda I)^i v = (A - \lambda I + \lambda I)(A-\lambda I)^i v = (A-\lambda I)^{i+1} v + \lambda (A-\lambda I)^i v.$$

Luego la acción de A sobre un espacio cíclico de dimensión m puede representarse en su base $\{v, (A-\lambda I)v, (A-\lambda I)^2 v, \dots (A-\lambda I)^{m-1} v\}$ mediante una matriz

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Esta matriz se denomina **bloque de Jordan**. Tiene la entrada λ en la diagonal, 1 sobre la diagonal y 0 en todas las otras posiciones. La base $\{v, (A-\lambda I)v, (A-\lambda I)^2 v, \dots (A-\lambda I)^{m-1} v\}$ se denomina **base de Jordan** del bloque B.

Ahora, supongamos que E es un espacio vectorial que se descompone como suma directa de espacios cíclicos invariantes bajo un operador $T\colon E \to E$. Es decir

$$E = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_n.$$

Donde cada V_i es un espacio T-invariante cíclico. Por lo anterior, el operador T puede representarse mediante una matriz

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & B_k \end{array}\right).$$

Donde cada B_i es el bloque de Jordan asociado al espacio cíclico V_i.

Definición 2.8.4: Forma canónica de Jordan

Una matriz J por bloques, donde los bloques de la diagonal corresponden a bloques de Jordan y el resto a bloques de ceros se denomina **forma canónica de Jordan**.

A continuación demostraremos que toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es semejante a una forma canónica de Jordan. Para esto bastará mostrar que todo espacio vectorial puede descomponerse como suma directa de espacios vectoriales A-invariantes y cíclicos. En efecto, ya vimos que un espacio cíclico admite una base que permute representar a A como un bloque de Jordan. Luego la acción de A sobre la suma directa de estos espacios se representará mediante la forma canónica de Jordan.

Teorema 2.8.5: Existencia de la forma canónica de Jordan

Sea $V \neq \{0\}$ un espacio de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$ y $T\colon V \to V$ un operador. Entonces existen espacios cíclicos T-invariantes $V_1, \dots, V_k$ tales que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k.$$

Demostración. Procederemos por inducción en la dimensión del espacio. Si el espacio es de dimensión 1 el resultado es automático. Supongamos que $\dim(V) > 1$ y que el resultado es cierto para todo espacio de la forma anterior de dimensión a lo más $\dim(V) - 1$.

Como el espacio vectorial V está definido sobre el cuerpo algebraicamente cerrado $\mathbb{C}$, podemos escribir el polinomio minimal de T de la forma

$$P_{\min}(t) = \prod_{i=1}^{s} (t - \lambda_i)^{m_i}.$$

Donde los $\lambda_i \in \mathbb{C}$ son valores propios y m_i los enteros positivos más pequeños tales que $\operatorname{Ker}((T - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i}) = \operatorname{Ker}((T - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i+1})$. Por el teorema de descomposición, tenemos entonces que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{Ker}((T - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i}).$$

Donde cada espacio $\operatorname{Ker}((T - \lambda_i \mathrm{id})^{m_i})$ es T-invariante. Por lo anterior, bastará demostrar que cada espacio no trivial de la forma $\operatorname{Ker}((T - \lambda \mathrm{id})^{m})$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ y entero positivo m tal que

$$\operatorname{Ker}((T - \lambda \mathrm{id})^{m}) = \operatorname{Ker}((T - \lambda \mathrm{id})^{m+1}),$$

puede descomponerse como suma directa de espacios cíclicos y T-invariantes.

Fijemos $\lambda \in \mathbb{C}$ y $m \geq 1$ con la propiedad anterior. Para simplificar la notación, escribiremos $L = T - \lambda \mathrm{id}$ y $U = \operatorname{Ker}(L^m) = \operatorname{Ker}((T - \lambda \mathrm{id})^m)$. Sea $d = \dim(U)$ y notemos que $d \leq \dim(V)$.

Consideremos el espacio $LU = \operatorname{Im}(L)$. Por el teorema de rango-nulidad

$$\dim(U) = \operatorname{Im}(L) + \dim(\operatorname{Ker}(L)),$$

luego, como $\operatorname{Ker}(L^m) = U$, tenemos que $\operatorname{Ker}(L) > 1$, por lo cual $\dim(LU) < \dim(U) \leq \dim(V)$.

Luego por hipótesis inductiva, existen espacios T-invariantes cíclicos $W_1, \dots, W_\ell$ tales que

$$LU = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_\ell.$$

Por definición, para cada espacio W_i, existe un vector propio generalizado $w_i \in W_i$ de orden r_i tal que

$$\{w_i, Lw_i, \dots L^{r_1 - 1} w_i\} \text{ es base de } W_i.$$

Como $W_i \subseteq LU$, para cada w_i podemos encontrar un vector v_i tal que $Lv_i = w_i$. Notemos que v_i es un vector propio generalizado de orden $r_i + 1$ ya que $L^{r_i+1} v_i = L^{r_i} w_i = 0$.

Definamos V_i' el espacio generado por la base $\{v_i, Lv_i, \dots, L^{r_i} v_i\}$ y tomemos

$$V' = V_1' + V_2' + \cdots + V_\ell'.$$

Afirmación: La suma $V' = V_1' + V_2' + \cdots + V_\ell'$ es directa.

Para ello basta demostrar que si $0 = v_1' + \cdots + v_\ell'$ con $v_i' \in V_i'$, entonces $v_i' = 0$ para todo $1 \leq i \leq \ell$. notemos que todo elemento $v_i' \in V_i'$ es de la forma

$$v_i' = c_0 v_i + c_1 L v_i + \cdots + c_r L^r v_i \text{ para constantes } c_0, \dots, c_r \in \mathbb{C}.$$

Luego es de la forma $f_i(L)v_i$ para el polinomio f_i con constantes $c_0, c_1, \dots, c_r$. De este modo, podemos escribir

$$0 = f_1(L)v_1 + \cdots + f_\ell(L)v_\ell.$$

Aplicando L y utilizando que $v_i = Lw_i$ obtenemos que

$$0 = f_1(L)w_1 + \cdots + f_\ell(L)w_\ell.$$

Como la suma de los espacios W_i es directa, obtenemos que $f_i(L)w_i = 0$ para todo i.

Como W_i es cíclico, su polinomio minimal es t^{r_i}, tenemos que t^{r_i} divide a f_i, como $r_i \geq 1$ podemos escribir $f_i(t) = tg_i(t)$ para algún polinomio $g(t)$. Luego tenemos que $f_i(L) = g_i(L)L$ y entonces

$$0 = f_1(L)v_1 + \cdots + f_\ell(L)v_\ell = g_1(L)w_1 + \cdots + g_\ell(L)w_\ell.$$

Nuevamente utilizamos que la suma de los espacios W_i es directa para concluir que $g_i(L)w_i = 0$ para todo i. Luego

$$f_i(L)v_i = g_i(L)Lv_i = g_i(L)w_i = 0.$$

Con esto hemos demostrado que la suma de los espacios V_i' es directa.

Afirmamos ahora que $LU = LV'$. En efecto, como todo $Lv_i \in LU$, es claro que $LV' \subseteq LU$. Por otro lado, como LV es suma directa de los espacios W_i y $w_i = Lv_i'$, entonces $LU \subseteq LV'$.

Sea $u \in U$ arbitrario. Como $LU = LV'$, existe $v' \in V'$ tal que $Lu = Lv'$. Luego podemos escribir $u = v' + (u - v')$ y tenemos que $v' \in V$ y $L(u - v') = 0$, luego $u - v' \in \operatorname{Ker}(L)$. Hemos mostrado que

$$U = V' + \operatorname{Ker}(L).$$

Claramente V' contiene elementos de $\operatorname{Ker}(L)$ (por ejemplo los $L^{r_i-1}w$) por lo cual la suma no es directa. Sea B' una base de V', podemos extender B' a una base $B = B' \cup \{u_1, \dots, u_t\}$ de U con elementos $u_1, \dots, u_t \in \operatorname{Ker}(L)$. Definiendo U_i el espacio generado por u_i, tenemos que

$$\begin{aligned} U &= V' \oplus U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_t \\ &= (V_1' \oplus \cdots \oplus V_\ell') \oplus (U_1 \oplus \cdots \oplus U_t). \end{aligned}$$

Por definición, todos los espacios V_i' son cíclicos e invariantes. Los espacios U_i están generados por un vector propio u_i, luego también son cíclicos e invariantes. Esto termina la demostración. □

Corolario 2.8.6

Toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es semejante a una matriz en forma canónica de Jordan.

Demostración. El espacio $\mathbb{C}^n$ puede descomponerse como suma directa de espacios cíclicos A-invariantes $U_1, \dots, U_k$. Tomando en cada espacio cíclico U_i una base de Jordan $\{u_i, (A-\lambda I)u_i, \dots (A-\lambda)^{m_i-1}u_i\}$ se obtiene una base de $\mathbb{C}^k$

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} \{u_i, (A - \lambda_i I)u_i, \dots (A - \lambda_i I)^{m_i-1}u_i\}.$$

Tomando P la matriz cuya columna $\sum_{i=1}^{j-1} m_i + \ell$ para $1 \leq j \leq k-1$ y $0 \leq \ell < m_j$ está dada por el vector $(A - \lambda_j I)^\ell u_j$. Obtenemos que

$$J = P^{-1}AP,$$

es una forma canónica de Jordan para A. □

Observación 2.19. El único lugar donde se usa que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ en las dos pruebas anteriores es cuando se usa que el polinomio minimal se puede factorizar en términos lineales. Si una matriz sobre $\mathbb{R}$ admite solo valores propios reales, entonces también es semejante una forma canónica de Jordan con entradas en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.8.7

Determine una forma canónica de Jordan y las matrices de paso de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.8.8: Propiedades de la forma canónica de Jordan

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y J una forma canónica de Jordan semejante a A. Las siguientes propiedades son ciertas:

1. Los elementos de la diagonal de J son exactamente los valores propios de A.
2. La suma de los tamaños de todos los bloques de Jordan J_i cuya diagonal está compuesta de λ es igual a la multiplicidad algebraica $\mu_A(\lambda)$.
3. El número de bloques de Jordan con diagonal λ y de tamaño al menos $j \geq 1$ está dado por
$$\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I)^j) - \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I)^{j-1}).$$
4. El número de bloques de Jordan con diagonal λ de tamaño exactamente $j \geq 1$ está dado por
$$2\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I)^j) - \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I)^{j-1}) - \dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I)^{j+1}).$$
5. El número de bloques de Jordan en J con diagonal λ es igual a su multiplicidad geométrica $\gamma_A(\lambda)$.
6. El tamaño del bloque de Jordan más grande asociado a λ es el exponente m_i de $(t-\lambda_i)^{m_i}$ en el polinomio minimal de A.

Demostración. Como A es semejante a J, tenemos que $A = PJP^{-1}$ para alguna matriz invertible P.

Notemos que J es una matriz diagonal superior, luego su polinomio característico está dado por $p_J(t) = \prod_{i=1}^{n}(t - J_{i,i})$. Como J es semejante a A, tenemos que $p_J(t) = p_A(t)$ y luego los elementos $J_{i,i}$ son valores propios de A. Esto muestra 1.

Por lo anterior, el valor propio λ ocurre tantas veces en la diagonal de J como su multiplicidad algebraica. Luego la suma de los tamaños de los bloques de Jordan con diagonal λ es exactamente su multiplicidad algebraica. Esto muestra 2.

Para ver que 3. es cierto, supongamos que un bloque de Jordan de tamaño j asociado a λ ocurre entre las filas $k+1, \ldots, k+j$ para algún entero k. Para $1 \leq i \leq j$ denotemos por v_i el vector dado por la columna $k+i$ de P. Luego tenemos que

$$Av_1 = \lambda v_1$$
$$Av_2 = \lambda v_2 + v_1$$

$$\begin{aligned} \vdots &= \quad \vdots \\ Av_{j-1} &= \lambda v_{j-1} + v_{j-2} \\ Av_j &= \lambda v_j + v_{j-1}. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)v_1 &= 0 \\ (A - \lambda I)v_2 &= v_1 \\ \vdots \quad &= \vdots \\ (A - \lambda I)v_{j-1} &= v_{j-1} \\ (A - \lambda I)v_j &= v_{j-1} \end{aligned}$$

De donde obtenemos que para todo $1 \leq i \leq j$ tenemos que $v_i \in \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^i \setminus \operatorname{Ker}(A - \lambda I)^{i-1}$ y luego es un vector propio generalizado de orden i.

De lo anterior, todo bloque de tamaño j aporta 1 vector propio generalizado de cada orden $1 \leq i \leq j$. Las columnas de P asociadas a bloques de Jordan con diagonal λ forman una base del espacio propio $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)^m$ para m el tamaño del bloque con diagonal λ más grande. De aquí obtenemos que las columnas de P que son valores propios de orden i asociados a λ generan una base de $\operatorname{Ker}((A - \lambda I)^i)$.

Sean $N_1, \dots, N_m$ la cantidad de bloques de Jordan de tamaño $1 \leq \ell \leq m$ Luego tenemos que

$$\dim(\operatorname{Ker}((A - \lambda I)^j)) = \sum_{\ell=1}^{j-1} \ell N_\ell + j(N_j + N_{i+1} + \dots N_m).$$

Luego

$$\dim(\operatorname{Ker}((A - \lambda I)^j)) - \dim(\operatorname{Ker}((A - \lambda I)^{j-1})) = N_j + \dots + N_m.$$

Donde la suma $N_j + \dots + N_m$ es la cantidad de bloques de tamaño al menos j. Esto prueba 3.

Para demostrar 4. usamos 3. de la forma siguiente: $N_j = (N_j + \dots + N_\ell) - (N_{j+1} + \dots + N_\ell)$, luego por 3. tenemos que

$$\begin{aligned} N_j &= (N_j + \dots + N_\ell) - (N_{j+1} + \dots + N_\ell) \\ &= \dim(\operatorname{Ker}((A - \lambda I)^j)) - \dim(\operatorname{Ker}((A - \lambda I)^{j-1})) - \big(\dim(\operatorname{Ker}((A - \lambda I)^{j+1})) - \dim(\operatorname{Ker}((A - \lambda I)^j))\big) \\ &= 2\dim(\operatorname{Ker}((A - \lambda I)^j)) - \dim(\operatorname{Ker}((A - \lambda I)^{j-1})) - \dim(\operatorname{Ker}((A - \lambda I)^{j+1})) \end{aligned}$$

El punto 5. es consecuencia de 3. ya que

$$N_1 + \dots + N_m = \dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda I)) - \dim(\operatorname{Ker}(I)) = \gamma_A(\lambda) - 0 = \gamma_A(\lambda).$$

Finalmente 6. se deduce de que las columnas de P asociadas a bloques de Jordan con diagonal λ forman una base del espacio propio $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)^m$ para m el tamaño del bloque con diagonal λ más grande. $\square$

Corolario 2.8.9

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. La forma canónica de Jordan de A es única salvo permutación de los bloques de Jordan.

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 2.8.8 parte 3, tenemos que el número de bloques de Jordan de tamaño j asociado a un valor propio fijo está totalmente determinado por A. Luego su forma canónica de Jordan está completamente determinada modulo permutación de los bloques de Jordan. $\square$

Ejercicio 2.8.10

Sea A una matriz tal que

1. Su polinomio característico es $p(t) = (t-3)(t-2)^3(t-1)^2$.
2. Su polinomio minimal es $p_{\min}(t) = (t-3)(t-2)^2(t-1)$.
3. $\dim(\mathrm{Ker}(A-2I)) = 2$ y $\dim(\mathrm{Ker}((A-2I)^2)) = 3$

Determine una forma canónica de Jordan de A.

Ejercicio 2.8.11

Muestre que no existe ninguna matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que

1. Su polinomio característico es $p(t) = (t-3)^4(t-2)^4(t-1)^2$.
2. Su polinomio minimal es $p_{\min}(t) = (t-3)(t-2)^3(t-1)$.
3. $\dim(\mathrm{Ker}(A-2I)) = 2$ y $\dim(\mathrm{Ker}((A-2I)^2)) = 4$.

Ejercicio 2.8.12

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que

- Su polinomio característico es $p_A(t) = t^8$.
- $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 4$, $\dim(\mathrm{Ker}(A^2)) = 6$, $\dim(\mathrm{Ker}(A^3)) = 7$ y $\dim(\mathrm{Ker}(A^4)) = 8$

Determine una forma canónica de Jordan de A.

Ejercicio 2.8.13

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que

- Su polinomio característico es $p_A(t) = (t+5)^5(t+2)(t-1)^6(t-7)^2$.
- Su polinomio minimal es $p_{\min}(t) = (t+5)^4(t+2)(t-1)^6(t-7)$.

Determine una forma canónica de Jordan de A.

Ejercicio 2.8.14

Para cada uno de los casos siguientes construya ejemplos de dos polinomios monicos p_1 y p_2 sobre $\mathbb{C}$ tales que sean polinomio característico y minimal de una matriz y tales que:

1. La forma de Jordan asociada a una matriz con estos polinomios es única salvo permutación de los bloques.
2. Existe más de una forma de Jordan posible asociada a p_1 y p_2 (sin contar permutación de los bloques).

Ejercicio 2.8.15

Muestre que existe una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y una secuencia de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ pero tal que si J_n y J son las formas canónicas de Jordan de A_n y A respectivamente entonces

$$\lim_{n\to\infty} J_n \neq J.$$

Esto indica que el cálculo de la forma de Jordan es numéricamente inestable: pequeños cambios en las entradas de la matriz pueden dar resultados muy distintos.

Nota: para eliminar la ambigüedad, asuma que en la forma de Jordan los valores propios están ordenados de mayor a menor en la diagonal, y los bloques asociados a un mismo valor propio están ordenados por tamaño de mayor a menor.

Indicación: Puede considerar la secuencia dada por

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ n^{-2} & 0 \end{pmatrix}.$$

2.9. Aplicaciones de la forma canónica de Jordan

Estudiaremos como calcular las potencias de una matriz aprovechándonos de su forma canónica de Jordan. Para ello, necesitaremos unos resultados preliminares

Observación 2.20. Sea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ un bloque de Jordan con diagonal $\lambda \in \mathbb{K}$. Escribamos $B = D+N$, donde $D = \lambda I$, entonces

$$DN = (\lambda I)N = \lambda N = N(\lambda I) = ND.$$

Luego si J es una matriz en forma canónica de Jordan, podemos escribirla de la forma

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & B_k \end{array}\right) = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c|c} D_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & D_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & D_k \end{array}\right)}_{D} + \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c|c} N_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & N_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & N_k \end{array}\right)}_{N}.$$

Donde $D_i = \lambda I$ es la diagonal del bloque de Jordan B_i. Luego tenemos que

$$DN = \left(\begin{array}{c|c|c|c} D_1N_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & D_2N_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & D_kN_k \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} N_1D_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & N_2D_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & N_kD_k \end{array}\right) = ND.$$

Proposición 2.9.1: Identidad del binomio de Newton para matrices que conmutan

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dos matrices tal que $AB = BA$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

Demostración. Como A y B conmutan, la demostración es esencialmente la misma que para números reales. Procedamos por inducción. Si $n = 0$ el resultado es claro. Sea $n > 0$ y supongamos que la identidad es cierta para $n-1$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
(A+B)^n &= (A+B)(A+B)^{n-1} \\
&= (A+B)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}A^kB^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}A^{k+1}B^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}BA^kB^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}A^{k+1}B^{n-(k+1)} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}A^kB^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}A^kB^{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}A^kB^{n-k} \\
&= \binom{n-1}{0}B^n + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\right)A^kB^{n-k}\right) + \binom{n-1}{n-1}A^n \\
&= B^n + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}\right) + A^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}.
\end{aligned}$$

Luego la identidad binomial es cierta para el exponente n. □

Usando la identidad del binomio de Newton, obtenemos lo siguiente.

Observación 2.21. Si $D=\lambda I$ y N es una matriz nilpotente ($N^t=0$) para algún $t>0$, entonces como $DN=ND$, tenemos que si $n>t$ entonces

$$(D+N)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^kD^{n-k} = \sum_{k=0}^{t-1}\binom{n}{k}N^kD^{n-k} = \sum_{k=0}^{t-1}\binom{n}{k}N^k\lambda^{n-k}.$$

¡Luego la suma anterior tan solo tiene t términos!

Ejemplo 2.9.2

Consideremos la matriz $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}}_{2I} + \underbrace{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{N}$.

Como $N^3=0$, tenemos que A^n está dado por

$$\begin{aligned}
A^n &= \lambda^nI + n\lambda^{n-1}N + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}N^2 \\
&= 2^n\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + n2^{n-1}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} + \frac{n(n-1)2^{n-2}}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3}\\ 0 & 2^n & n2^{n-1}\\ 0&0&2^n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

De manera más general, los exponentes de un bloque de Jordan B de tamaño k tienen la forma siguiente para valores de n más grandes que el tamaño de la matriz

$$B^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \dots & \binom{n}{k-3}\lambda^{n-k+3} & \binom{n}{k-2}\lambda^{n-k+2} & \binom{n}{k-1}\lambda^{n-k+1} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \ddots & \ddots & \binom{n}{k-3}\lambda^{n-k+3} & \binom{n}{k-2}\lambda^{n-k+2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & \ddots & \ddots & \ddots & \binom{n}{k-3}\lambda^{n-k+3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Más formalmente, para $0 \leq \ell \leq k-1$ la supradiagonal $(B^n_{i,i+\ell})_{i\in\{1,\dots,k-\ell\}}$ consiste exclusivamente del valor $\binom{n}{\ell}\lambda^{n-\ell}$.

Juntando todo lo anterior, si J es una matriz en forma canónica de Jordan con bloques de Jordan $B_1, \dots, B_k$, entonces J^n es la matriz diagonal cuyos bloques están dados por $(B_1)^n, \dots, (B_k)^n$ y donde cada uno de estos es de la forma anterior.

Ejercicio 2.9.3

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

1. Encuentre una forma canónica de Jordan J para A y sus matrices de paso P y P^{-1}.
2. Encuentre una expresión para J^n.
3. Usando lo anterior, encuentre una expresión para A^n.

Indicación: Si desea chequear, el resultado debiese ser

$$A^n = (-1)^n \begin{pmatrix} 1-3n & -6n & 15n \\ -n & 1-2n & 5n \\ -n & -2n & 1+5n \end{pmatrix}.$$

Usando lo anterios podemos también resolver recurrencias lineales sin suponer que la matriz compañera es diagonalizable.

Ejemplo 2.9.4

Considere la recurrencia lineal dada por

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}.$$

Buscaremos una solución con condición inicial $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$.
Tenemos que para $n \geq 1$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}}_{C^{n-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego basta encontrar una expresión para C^{n-1}. Su polinomio característico es $p_C(t) = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2$. Notamos que $\dim(\mathrm{Ker}(C-2I)) = 1$ por lo cual C no es diagonalizable.

Como la matriz es de tamaño 2, la única forma de Jordan posible es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}. \text{ De acá se deduce que } J^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Busquemos matrices de paso. Notemos que si las columnas de P son v_1 y v_2, luego $Cv_1 = PJe_1 = 2Pe_1 = 2v_1$ y $Cv_2 = PJe_2 = 2Pe_2 + e_1 = 2v_2 + v_1$. Luego v_1 debe satisfacer que

$$(C - 2I)v_2 = v_1 \quad \text{y} \quad (C - 2I)v_1 = 0.$$

Tomamos un vector arbitrario $v_1 \notin \ker(C - 2I)$, por ejemplo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Luego

$$v_2 = (C - 2I)v_1 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

De acá podemos tomar

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se puede verificar que $C = PJP^{-1}$. Finalmente tenemos que

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}}_{J^{n-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De donde un cálculo da que

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n2^{n-1} \\ (n-1)2^{n-2} \end{pmatrix}.$$

De acá se deduce que la solución a la recurrencia está dada por

$$a_n = n2^{n-1}.$$

Ejercicio 2.9.5

Considere la recurrencia lineal dada por

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}.$$

Encuentre una solución con condición inicial $a_0 = -1$ y $a_1 = 1$.

Ejercicio 2.9.6

Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Calcule la forma canónica de Jordan y las matrices de paso de A.
2. Encuentre una expresión para A^n para todo $n \geq 0$.

Consideremos la ecuación diferencial ordinaria con condición inicial

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y(t) = \lambda y(t), \quad y(0) = C.$$

Donde $y(t)$ es una función a variable real. Es un clásico que la única solución a esta ecuación está dada por

$$y(t) = C\mathrm{e}^{\lambda t}.$$

Supongamos ahora que existe una función $\exp\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\exp(\mathbf{0}) = I$ y

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(At) = A\exp(At) \text{ para toda matriz } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Luego, si tenemos una ecuación de diferencial ordinaria con n incógnitas de la forma

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{y}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}}_{\vec{y}(t)} \text{ con condición inicial } \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ \vdots \\ y_n(0) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}}_{\vec{C}},$$

entonces tendríamos que una solución está dada por

$$\vec{y}(t) = \exp(At)\vec{C}.$$

Lo que haremos en lo que sigue será definir la exponencial de una matriz, probar que satisface algunas propiedades que la asemejan a la función exponencial habitual, estudiar una manera para calcularla y finalmente aplicarla para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales.

Definición 2.9.7: Exponencial de una matriz

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, su exponencial $\exp(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ está dada por la fórmula

$$\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}.$$

Donde el límite está tomado en cada entrada de la matriz.

Observación 2.22. La exponencial de una matriz está bien definida para toda matriz, es decir, el límite siempre existe. Esto puede demostrarse utilizando el criterio M de Weierstrass (si la serie es absolutamente convergente, entonces es convergente) o puede hacerse por pasos de manera directa (primero se demuestra para matrices diagonales, luego para bloques de Jordan, y finalmente para todas las matrices). Omitiremos la demostración de este resultado.

Consideremos una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Podemos escribir $A = PJP^{-1}$ donde J es una forma canónica de Jordan. Luego tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} PJ^kP^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{J^k}{k!}\right)P^{-1}.$$

Tomando límites obtenemos que

$$\exp(A) = P\exp(J)P^{-1}.$$

En consecuencia, bastará estudiar la exponencial de una matriz en el caso de una forma canónica de Jordan.

Ejercicio 2.9.8

Sea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz de proyección. Muestre que

$$\exp(P) = I + (1 - \mathrm{e})P.$$

Ejercicio 2.9.9

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y considere la identidad $I \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Muestre que $\exp(\lambda I) = \mathrm{e}^{\lambda} I$. En particular $\exp(\mathbf{0}) = I$.

El ejercicio anterior se generaliza al caso de matrices diagonales de la manera siguiente.

Ejemplo 2.9.10: Matriz diagonal

Sea $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Luego

$$\exp(D) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} \frac{1}{k!}\lambda_1^k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{k!}\lambda_2^k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{k!}\lambda_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \mathrm{e}^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

De esto se deduce que la exponencial de una matriz diagonalizable $A = PDP^{-1}$ siempre existe y está dada por

$$\exp(A) = P \exp(D) P^{-1}.$$

Ejemplo 2.9.11: Matriz nilpotente

Sea $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz nilpotente de orden m, es decir, tal que $N^m = \mathbf{0}$. Luego

$$\exp(N) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{N^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{N^k}{k!} = I + N + \frac{1}{2}N^2 + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}N^{m-1}.$$

Proposición 2.9.12: Exponencial de una suma

Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dos matrices que conmutan, es decir, tales que $AB = BA$. Entonces

$$\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B).$$

Demostración. Dado que A y B conmutan, la prueba es idéntica a la prueba para números reales (se expande el desarrollo en suma y se utiliza la fórmula del producto de Cauchy). Omitiremos en este apunte los detalles que justifican el uso de la fórmula de producto de Cauchy para matrices.

Basta tomar

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(A+B)^k \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} A^i B^{k-i} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \frac{A^i}{i!} \frac{B^{k-i}}{(k-i)!}.$$

Por la fórmula para el producto de Cauchy tenemos que

$$\exp(A+B) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \frac{A^i}{i!} \frac{B^{k-i}}{(k-i)!} = \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{A^i}{i!} \right) \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{B^i}{i!} \right) = \exp(A)\exp(B).$$

$\square$

Ejercicio 2.9.13

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Muestre que $\exp(A)$ es invertible.
Indicación: Utilice la fórmula para la suma de matrices.

Ejercicio 2.9.14

Considere las matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcule $\exp(A), \exp(B)$ y $\exp(A+B)$. Concluya que el resultado anterior no es válido si las matrices no conmutan.

Sea $B = \lambda I + N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ un bloque de Jordan de tamaño n. Como λI conmuta con N, tenemos que $\exp(B) = \exp(\lambda I)\exp(N) = \mathrm{e}^{\lambda}\exp(N)$. En consecuencia, podemos escribir la exponencial de un bloque de Jordan de la manera siguiente

$$\exp(B) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda} & \mathrm{e}^{\lambda} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda} & \dots & \frac{1}{(n-3)!}\mathrm{e}^{\lambda} & \frac{1}{(n-2)!}\mathrm{e}^{\lambda} & \frac{1}{(n-1)!}\mathrm{e}^{\lambda} \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda} & \mathrm{e}^{\lambda} & \dots & \frac{1}{(n-4)!}\mathrm{e}^{\lambda} & \frac{1}{(n-3)!}\mathrm{e}^{\lambda} & \frac{1}{(n-2)!}\mathrm{e}^{\lambda} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda} & \dots & \frac{1}{(n-5)!}\mathrm{e}^{\lambda} & \frac{1}{(n-4)!}\mathrm{e}^{\lambda} & \frac{1}{(n-3)!}\mathrm{e}^{\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathrm{e}^{\lambda} & \mathrm{e}^{\lambda} & \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathrm{e}^{\lambda} & \mathrm{e}^{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.9.15

Consideremos el bloque de Jordan

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Luego su exponencial está dada por

$$\exp(B) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^7 & \mathrm{e}^7 & \frac{\mathrm{e}^7}{2} & \frac{\mathrm{e}^7}{6} \\ 0 & \mathrm{e}^7 & \mathrm{e}^7 & \frac{\mathrm{e}^7}{2} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^7 & \mathrm{e}^7 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{e}^7 \end{pmatrix}$$

Consideremos una matriz en forma canónica de Jordan

$$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & B_\ell \end{array}\right).$$

Donde $B_1, \dots, B_\ell$ son los bloques de Jordan. Luego tenemos que

$$\exp(J) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_1^k & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B_2^k & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & B_\ell^k \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \exp(B_1) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \exp(B_2) & \dots & \mathbf{0} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \exp(B_\ell) \end{array}\right).$$

Como ya sabemos calcular la exponencial de un bloque de Jordan, hemos obtenido una fórmula que permite calcular la exponencial de cualquier matriz.

Ejercicio 2.9.16

Calcule la exponencial de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, verifiquemos que la exponencial satisface la propiedad correcta para la derivada

Proposición 2.9.17: Derivada de la exponencial

Para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tenemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(At) = A \exp(At).$$

DEMOSTRACIÓN.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(At) &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(A(t+h)) - \exp(At)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(Ah)\exp(At) - \exp(At)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(\exp(Ah) - I)}{h} \exp(At). \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\frac{(\exp(Ah) - I)}{h} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{h} \frac{(Ah)^k}{k!} = A + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{A^k}{k!} h^{k-1}.$$

Como la serie converge absolutamente, podemos intercambiar los límites y obtenemos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\exp(Ah) - I)}{h} = A,$$

luego obtenemos que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \exp(At) = A \exp(At).$$

□

La proposición anterior muestra que efectivamente podemos utilizar la exponencial para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales como el exhibido al inicio de esta unidad.

Ejercicio 2.9.18

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y denotemos su traza por $\operatorname{tr}(A)$. Muestre que

$$\det(\exp(A)) = \mathrm{e}^{\operatorname{tr}(A)}.$$

Ejemplo 2.9.19

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y $t \in \mathbb{C}$. Para calcular $\exp(At)$ podemos escribir $A = PJP^{-1}$ lo cual nos da

$$\exp(At) = \exp(PJtP^{-1}) = P\exp(Jt)P^{-1}.$$

Para calcular $\exp(Jt)$ la separamos en bloques de Jordan Bt para los cuales podemos escribir $Bt = (\lambda I + N)t$ luego $\exp(Bt) = \exp(t\lambda I)\exp(tN) = e^{t\lambda}\exp(tN)$. Finalmente, tenemos que

$$\exp(tB) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k N^k}{k!}.$$

De aquí tenemos que

$$\exp(Bt) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda} & t\mathrm{e}^{\lambda} & \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{\lambda} & \dots & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}\mathrm{e}^{\lambda} & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\mathrm{e}^{\lambda} & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{\lambda} \\ 0 & \mathrm{e}^{\lambda} & t\mathrm{e}^{\lambda} & \dots & \frac{t^{n-4}}{(n-4)!}\mathrm{e}^{\lambda} & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}\mathrm{e}^{\lambda} & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\mathrm{e}^{\lambda} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda} & \dots & \frac{t^{n-4}}{(n-5)!}\mathrm{e}^{\lambda} & \frac{t^{n-4}}{(n-4)!}\mathrm{e}^{\lambda} & \frac{t^{n-3}}{(n-3)!}\mathrm{e}^{\lambda} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mathrm{e}^{\lambda} & t\mathrm{e}^{\lambda} & \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mathrm{e}^{\lambda} & t\mathrm{e}^{\lambda} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \mathrm{e}^{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Con esto tenemos un método para calcular $\exp(At)$ para toda matriz A.

Ejercicio 2.9.20

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales dado por

$$\begin{array}{rcrcr} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) & = & 2x(t) & + & y(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) & = & & & 2y(t) \end{array} \quad \text{con condición inicial } x(0) = 1 \text{ y } y(0) = 3.$$

Encuentre una solución utilizando exponenciales de matrices.

Ejercicio 2.9.21

Considere el sistema de ecuaciones diferenciales dado por

$$\begin{array}{rcrcr} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) & = & 3x(t) & + & y(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) & = & x(t) & + & 3y(t) \end{array} \quad \text{con condición inicial } x(0) = 1 \text{ y } y(0) = 1.$$

Encuentre una solución utilizando exponenciales de matrices.

Del mismo modo que las matrices pueden utilizarse para resolver recurrencias lineales de orden superior, también pueden utilizarse para resolver ecuaciones diferenciales de orden superior utilizando una matriz compañera.

Ejemplo 2.9.22

Considere la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) = C_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + C_2 y(t)$$

Luego podemos escribir $x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t)$ y entonces tenemos que

$$\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

¡Luego el método que desarrollamos nos entrega una forma de resolver ecuaciones diferenciales de un grado arbitrariamente grande!

Ejercicio 2.9.23

Encuentre la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) = 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) - 4y(t) \text{ con condición inicial } y'(0) = 1 \text{ y } y(0) = 0.$$

Ejercicio 2.9.24

Encuentre, usando las técnicas aprendidas en este curso, la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t) = -y(t)$$

con condición inicial $y'(0) = B$ y $y(0) = A$.

Capítulo 3

Espacios vectoriales con producto interno

En esta unidad añadiremos una estructura adicional a los espacios vectoriales que nos permitirá modelar nociones geométricas. A diferencia de la unidad anterior, acá siempre asumiremos que tenemos un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Comenzaremos dando una definición de producto interno que generaliza el producto punto en $\mathbb{R}^n$.

3.1. Producto interno y norma

Comenzaremos dando una definición de producto interno en un espacio vectorial **real**. Más adelante daremos una definición más general que funciona en el caso complejo.

Definición 3.1.1: producto interno para espacios vectoriales reales

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una **forma bilineal** sobre E es una función $f : E \times E \to \mathbb{R}$ que satisface lo siguiente:

1. $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$ y $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$, para todo $x, y, z \in E$.
2. $f(x, \lambda y) = f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$, para todo $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si además la forma bilineal satisface que

$$f(x, y) = f(y, x),$$

decimos que es **simétrica**.
Si además la forma bilineal simétrica satisface que

$$f(x, x) > 0 \text{ si } x \neq 0,$$

decimos que es **definida positiva**.
Un **producto interno** es una forma bilineal simétrica y definida positiva. La denotamos de la manera siguiente

$$f(x, y) = \langle x, y\rangle.$$

Ejemplo 3.1.2

Si $E = \mathbb{R}^n$, entonces el producto escalar definido por

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_i y_i.$$

Es un producto interno. También se le denomina **producto punto** o **producto escalar**

Ejemplo 3.1.3

Sea $E = \mathbb{R}^2$ y para $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ considere

$$f(x, y) = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_2 + 4x_2y_2.$$

$f(x, y)$ es un producto interno para $\mathbb{R}^2$. Es sencillo verificar que es una forma bilineal simétrica. Para ver que es definida positiva notemos que $f(x, x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + 3x_2^2$ luego $f(x, x) \geq 0$ y es cero si y solamente si $x = (0, 0)$.

Ejemplo 3.1.4

Si E es el espacio de funciones continuas de $[0, 1]$ a $\mathbb{R}$, entonces el producto definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Es un producto interno.

Observación 3.1. En el caso de un espacio vectorial E sobre $\mathbb{C}$, no existen formas bilinares simétricas y definidas positivas. En efecto, supongamos que existe una y denotémosla por $\langle\cdot, \cdot\rangle$. Entonces tendríamos que $\langle x, x\rangle > 0$ para todo $x \in E \setminus \{0\}$. Por otro lado

$$\langle ix, ix\rangle = i\langle x, ix\rangle = i^2\langle x, x\rangle = -\langle x, x\rangle < 0.$$

Lo cual es una contradicción pues $ix \neq 0$.

En el caso de un espacio vectorial complejo, utilizaremos una definición de producto interno más general. Recordemos que para $z = a + bi \in \mathbb{C}$ denotamos por $\overline{z} = a - bi$ el conjugado de z.

Definición 3.1.5: producto interno para espacios vectoriales complejos

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Una **forma sesquilinear** sobre E es una función $f : E \times E \to \mathbb{C}$ que satisface lo siguiente:

1. $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$ y $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$, para todo $x, y, z \in E$.
2. $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$ y $f(x, \lambda y) = \overline{\lambda} f(x, y)$, para todo $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si además la forma sesquilinear satisface que

$$f(x, y) = \overline{f(y, x)},$$

decimos que es **hermítica**.

Finalmente, si la forma sesquilinear hermítica satisface que $f(x, x) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ para todo $x \in E$ y

$$f(x, x) > 0 \text{ si } x \neq 0,$$

decimos que es **definida positiva**.

Un **producto interno** o **producto escalar** para E es una forma sesquilinear hermítica y definida positiva. La denotamos de la manera siguiente

$$f(x, y) = \langle x, y\rangle.$$

Ejemplo 3.1.6

Si $E = \mathbb{C}^n$, entonces el producto definido por

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Es un producto interno, se denomina **producto punto** o **producto hermítico**.

Ejercicio 3.1.7

Sea $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ el espacio de matrices cuadradas complejas de tamaño n. Muestre que la función $f(A, B) = \langle A, B \rangle$ dada por

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^*) \text{ para toda } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

es un producto interno. B^* denota la matriz transpuesta conjugada de B, es decir, $B^* = \overline{(B^T)}$.

Observación 3.2. Si aplicamos la definición del producto interno para espacios vectoriales complejos a un espacio vectorial real, recuperamos la definición anterior (ya que el conjugado de un real es el mismo número real).

Definición 3.1.8: Norma inducida por un producto interno

Dado un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con producto interno, definimos su **norma** mediante $\|\cdot\| \colon E \to \mathbb{R}$ mediante

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}.$$

Proposición 3.1.9: Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Para todo $x, y \in E$ se tiene que

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Demostración. Notemos primero que para todo $z \in E$, $\langle 0, z \rangle = \langle 1 - 1, z \rangle = \langle 1, z \rangle - \langle 1, z \rangle = 0$ y $\langle z, 0 \rangle = \langle 0, \overline{z} \rangle = 0$. Luego la desigualdad es trivial si $x = 0$ o $y = 0$. Supongamos que ambos son distintos de 0.

Consideremos $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|^2} \in \mathbb{C}$ y $\|x - \lambda y\|^2 \geq 0$. Notemos que

$$\begin{aligned}
\|x - \lambda y\|^2 &= \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, -\lambda y \rangle + \langle -\lambda y, x \rangle + \langle -\lambda y, -\lambda y \rangle \\
&= \|x\|^2 + -\overline{\lambda} \langle x, y \rangle + -\lambda \langle y, x \rangle + \langle -\lambda y, -\lambda y \rangle \\
&= \|x\|^2 - \overline{\lambda} \langle x, y \rangle - \lambda \overline{\langle x, y \rangle} + |\lambda|^2 \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 - \frac{1}{\|y\|^2} \overline{\langle x, y \rangle} \langle x, y \rangle - \frac{1}{\|y\|^2} \langle x, y \rangle \overline{\langle x, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^4} \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 - 2 \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}
\end{aligned}$$

$$= \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\|y\|^2}$$

Luego $\|x\|^2 \geq \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\|y\|^2}$, lo cual es equivalente a decir que

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Lo cual demuestra la desigualdad de Cauchy-Schwarz □

Ejercicio 3.1.10

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con producto interno. Muestre que

1. $\|z\| \geq 0$ para todo $z \in E$ y $\|z\| = 0$ si y solamente si $z = 0$
2. $\|\lambda z\| = |\lambda| \|z\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ (o $\lambda \in \mathbb{R}$).
3. $\|w + z\| \leq \|z\| + \|w\|$ para todo $z, w \in E$.

Supongamos ahora que tenemos una norma $\|\cdot\| \colon E \to \mathbb{R}$ determinada por un producto interno. Entonces el producto interno está completamente determinado por los valores de la norma al cuadrado. En efecto, supongamos que existe un producto interno tal que

$$\|z\|^2 = \langle z, z\rangle \text{ para todo } z \in E.$$

Si $\Re(z)$ y $\Im(z)$ denotan la partes reales e imaginarias de un complejo z respectivamente, tenemos que

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2\Re(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2.$$

$$\|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle = \|x\|^2 - 2\Re(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2.$$

Entonces, si E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ tenemos que

$$\langle x, y\rangle = \Re(\langle x, y\rangle) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right).$$

En el caso de un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ se puede razonar de manera análoga para obtener que

$$\langle x, y\rangle = \underbrace{\frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)}_{\Re(\langle x,y\rangle)} + i \underbrace{\frac{1}{4}\left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\right)}_{\Im(\langle x,y\rangle)}.$$

Luego, si una norma está determinada por un producto interno, este es único.

3.2. Ortogonalidad y el proceso de Gram-Schmidt

De manera análoga a $\mathbb{R}^n$, podemos definir una noción de ortogonalidad en un espacio de producto interno.

Definición 3.2.1: Ortogonalidad

Sea E un espacio vectorial real o complejo con producto interno. Decimos que x e y en E son **ortogonales** si $\langle x, y\rangle = 0$.

Del mismo modo que con el producto escalar, se puede definir la proyección sobre un vector $v \in E$ mediante

$$P_v(x) = \frac{\langle x, v\rangle v}{\|v\|^2}.$$

Del mismo modo se puede definir la proyección ortogonal $P_v^{\perp}$ mediante $P_v^{\perp} = \mathrm{id} - P_v$.

Si tenemos un conjunto $B \subseteq E$, decimos que el conjunto B es **ortogonal** si para todo par $x, y \in B$ tenemos que x e y son ortogonales. Si además tenemos que $\|x\| = 1$ para todo $x \in B$, decimos que B es **ortonormal**.

A continuación mostraremos que todo espacio vectorial con producto interno de dimensión finita admite una base ortonormal. Para ello utilizaremos un método que transforma una base arbitraria en una base ortonormal. Este método se denomina **proceso de Gram-Schmidt**.

Teorema 3.2.2: Teorema de Gram-Schmidt

Todo espacio vectorial E de dimensión finita con producto interno admite una base ortonormal.

Demostración. Sea $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ una base de E. Definiremos vectores $v_1, \ldots, v_m$ y $u_1, \ldots, u_m$ de la manera siguiente.

$$
\begin{aligned}
v_1 &= b_1 & u_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} \\
v_2 &= b_2 - P_{v_1}(b_2) & u_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} \\
v_3 &= b_3 - P_{v_2}(b_3) - P_{v_1}(b_3) & u_3 &= \frac{v_3}{\|v_3\|} \\
&\vdots & &\vdots \\
v_k &= b_k - \sum_{i=1}^{k-1} P_{v_i}(b_k) & u_k &= \frac{v_k}{\|v_k\|} \\
&\vdots & &\vdots \\
v_m &= b_m - \sum_{i=1}^{m-1} P_{v_i}(b_m) & u_m &= \frac{v_m}{\|v_m\|}
\end{aligned}
$$

Definimos los conjuntos $B' = \{v_1, \ldots, v_m\}$ y $B'' = \{u_1 \ldots, u_m\}$. Mostraremos que B' es una base ortogonal de U. De eso se deducirá que B'' es una base ortonormal de U.

Para mostrar que B' es generador, mostremos que para $1 \leq k \leq m$ el vector b_k es generado por $\{v_1, \ldots, v_k\}$. Si $k = 1$ es claro pues $v_1 = b_1$. Para $k \geq 1$ tenemos que

$$b_k = v_k + \sum_{i=1}^{k-1} P_{v_i}(b_k) = v_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle b_k, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i.$$

Luego b_k es generado por $\{v_1, \ldots, v_k\}$. En particular, el conjunto $\{v_1, \ldots, v_m\}$ genera $\{b_1, \ldots, b_m\}$ que a su vez genera U, por lo cual deducimos que B' es generador.

Probemos ahora que B' es linealmente independiente. Para ello procederemos por inducción. Claramente $\{v_1\}$ es linealmente indpendiente ya que $v_1 = b_1 \neq 0$. Sea $2 \leq k \leq m$ y supongamos que $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ es linealmente independiente. De modo análogo al anterior, se puede demostrar que todo v_k es combinación lineal de $\{b_1, \ldots, b_k\}$ donde el coeficiente de b_k es no nulo. Es decir, existen escalares $\alpha_{k,1}, \ldots, \alpha_{k,k}$ con $\alpha_{k,k} \neq 0$ tales que

$$v_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k,j} b_j \text{ para todo } 1 \leq k \leq m.$$

Tomemos escalares c_i donde $1 \leq i \leq k$ tales que

$$\sum_{i=1}^{k} c_i v_i = 0.$$

Si suponemos que $c_k \neq 0$, entonces podemos escribir

$$v_k = \sum_{i=1}^{k-1} -\frac{c_i}{c_k} v_i.$$

Reescribiendo la ecuación en términos de b obtenemos que

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_{k,j} b_j = \sum_{i=1}^{k-1} -\frac{c_i}{c_k} \left(\sum_{j=1}^{i} \alpha_{i,j} b_j \right).$$

Como $\alpha_{k,k} \neq 0$, obtenemos que

$$b_k = \frac{1}{\alpha_{k,k}} \left(\sum_{i=1}^{k-1} -\frac{c_i}{c_k} \left(\sum_{j=1}^{i} \alpha_{i,j} b_j \right) - \sum_{j=1}^{k-1} \alpha_{k,j} b_j \right).$$

Por lo cual b_k sería combinación lineal de $\{b_1, \ldots, b_{k-1}\}$, lo cual es una contradicción. Luego $c_k = 0$. Pero por hipótesis $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ es linealmente independiente, luego obtenemos también que $c_i = 0$ para $1 \leq i \leq k-1$. Concluimos que $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es linealmente independiente.

Finalmente, probemos la ortogonalidad de B'. Debemos probar que si $1 \leq i < j \leq m$ entonces $\langle v_i, v_j \rangle = 0$. Para ello procedamos por inducción. El caso base es $i = 1$, $j = 2$, donde se verifica

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle b_1, b_2 - P_{b_1} b_2 \rangle = \langle P_{b_1}(b_1), P_{b_1}^{\perp}(b_2) \rangle = 0.$$

Sea $k \geq 3$ y supongamos inductivamente, que para todo $1 \leq i < j \leq k-1$ tenemos que $\langle v_i, v_j \rangle = 0$. Mostremos que si $1 \leq i < j \leq k$ lo mismo ocurre. El único caso que resta mostrar es cuando $j = k$.

Consiremos entonces $1 \leq i < k$, tenemos que

$$\langle v_i, v_k \rangle = \langle v_i, b_k \rangle - \sum_{\ell=1}^{k-1} \langle v_i, P_{v_\ell}(b_k) \rangle = \langle v_i, b_k \rangle - \sum_{\ell=1}^{k-1} \frac{\langle v_\ell, b_k \rangle}{\|v_\ell\|^2} \langle v_i, v_\ell \rangle.$$

Por hipótesis inductiva, $\langle v_i, v_\ell \rangle = 0$ si $\ell \neq i$, luego obtenemos que

$$\langle v_i, v_k \rangle = \langle v_i, b_k \rangle - \langle v_i, b_k \rangle \frac{\langle v_i, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} = 0.$$

Lo cual finaliza la prueba. $\square$

Ejercicio 3.2.3

Sea $E = \mathbb{R}^2$ con el producto interno dado por

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 4 x_2 y_2.$$

Verifique que $\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$ es una base ortonormal de E, donde

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3.2.4

Considere $\mathbb{R}^4$ con el producto punto. Encuentre una base ortonormal del subespacio definido por el siguiente conjunto de vectores

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Una utilidad enorme de las bases ortogonales, es que dan una herramienta para definir proyecciones sobre un subespacio que representan "el elemento más cercano". Recordemos que una proyección es un operador idempotente, es decir, tal que $P = P^2$.

Definición 3.2.5: Proyección ortogonal

Sea E un espacio vectorial y $P \colon E \to E$ una proyección. Decimos que P es una **proyección ortogonal** si

$$\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle \text{ para todo } x, y \in E.$$

En el caso de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, aplicando lo anterior a los vectores canónicos e_i, e_j obtenemos

$$A_{i,j} = \langle Ae_i, e_j \rangle = \langle e_i, Ae_j \rangle = A_{j,i}.$$

Luego una matriz de proyección es una proyección ortogonal si y solamente si la matriz es simétrica, es decir, A es igual a su transpuesta ($A = A^T$).

Proposición 3.2.6: Las bases ortogonales determinan proyecciones ortogonales

Sea U un subespacio de un espacio vectorial E determinado por una base ortogonal $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$. El operador

$$P_U = \sum_{i=1}^{m} P_{b_i},$$

es una proyección ortogonal.

Demostración. Verifiquemos que P_U es una proyección. En efecto, notemos que si $i \neq j$ entonces $P_{b_i} \circ P_{b_j} = 0$, esto puesto que $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, por lo que para todo $x \in E$,

$$(P_{b_i} \circ P_{b_j})(x) = P_{b_i}\left(\frac{\langle x, b_j \rangle}{\|b_j\|^2} b_j\right) = \frac{\langle b_i, b_j \rangle}{\|b_i\|^2} \frac{\langle x, b_j \rangle}{\|b_j\|^2} b_i = 0.$$

De aquí, obtenemos que

$$(P_U)^2 = \sum_{i=1}^{m} (P_{b_i})^2 = \sum_{i=1}^{m} P_{b_i} = P_U.$$

Luego efectivamente P_U es una proyección. Para ver que es ortogonal basta notar que P_{b_i} es ortogonal para cada $b_i \in B$, luego

$$\langle P_U(x), y \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle P_{b_i}(x), y \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle x, P_{b_i}(y) \rangle = \langle x, P_u(y) \rangle \text{ para todo } x, y \in E.$$

Lo cual finaliza la prueba. □

Observación 3.3. Si además de ortogonal, una base es ortonormal, entonces las proyecciones se pueden escribir sin el término "$\|v\|^2$" en el denominador. Eso hace la escritura más agradable.

Ejercicio 3.2.7

Encuentre un operador de proyección ortogonal cuya imagen sea el espacio

$$U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 3x_2 - x_3 = 0\}$$

Ejercicio 3.2.8

Encuentre una base de un subespacio U de $\mathbb{R}^n$ que no es ortogonal y tal que si definimos el operador P_U con esa base, entonces ni siquiera es una proyección.

Proposición 3.2.9: descomposición ortogonal mediante proyección

Sea $P\colon E \to E$ una proyección ortogonal en un espacio vectorial E con producto interno. Entonces $\operatorname{Ker}(P)$ e $\operatorname{Im}(P)$ son ortogonales.

Demostración. En efecto, Sea $x \in \operatorname{Ker}(P)$ e $y \in \operatorname{Im}(P)$, entonces $y = P(z)$ para algún $z \in E$. Luego

$$\langle x, y\rangle = \langle x, P(z)\rangle = \langle P(x), z\rangle = \langle 0, z\rangle = 0.$$

De donde se obtiene el resultado. □

Observación 3.4. Lo anterior es válido también para un espacio vectorial de dimensión infinita, tan solo es necesario que esté dotado de un producto interno.

Definición 3.2.10: Complemento ortogonal de un subespacio vectorial

Sea U un subespacio de un espacio vectorial E. El **complemento ortogonal** de U está dado por

$$U^{\perp} = \{v \in E : \langle v, u\rangle = 0 \text{ para todo } u \in U\}.$$

Es interesante considerar la siguiente caracterización del complemento ortogonal. Si B es una base de U, entonces $x \in U^{\perp}$ si y solamente si $\langle x, u\rangle = 0$ para todo $u \in B$. En efecto, si $x \in U^{\perp}$, es directo de la definición que $\langle x, u\rangle = 0$ para todo $u \in B$.

Para la otra dirección, notemos que como $U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ es base, podemos escribir todo $y \in U$ como $y = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i$ para escalares $a_i \in \mathbb{C}$, luego

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{m} \overline{a_i}\langle x, u_i\rangle = 0.$$

Por lo cual $x \in U^{\perp}$.

Proposición 3.2.11: Descomposición en subespacio y complemento ortogonal

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita y $W \subseteq E$ un subespacio. Entonces $E = W \oplus W^{\perp}$.

Demostración. Sea $B = \{u_1, \ldots, u_m\}$ una base ortonormal de W y para $1 \leq i \leq m$ denotemos por $P_i \colon E \to E$ la proyección P_{u_i} sobre u_i.

Consideremos el operador $P_W \colon E \to E$ dado por

$$P = \sum_{i=1}^{k} P_i.$$

Como la base es ortogonal, tenemos que P es una proyección ortogonal y entonces $E = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$. Basta mostrar que $W = \mathrm{Im}(P)$ y $W^\perp = \ker(P)$.

Probemos que $\ker(P) = W^\perp$. Como B es una base de W, tenemos que $x \in W^\perp$ si y solamente si $\langle x, u_i \rangle = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$. De este modo concluimos que $P(x) = 0$ si y solamente si $x \in W^\perp$, de donde se obtiene que $\ker(P) = W^\perp$.

Ahora probemos $W = \mathrm{Im}(P)$. Es claro de la definición de P que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$P(x) = \sum_{i=1}^{m} P_i(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\langle x, u_j \rangle}{\|u_j\|^2} u_j \in W.$$

Luego $\mathrm{Im}(P) \subseteq (W)$. Para la otra inclusión, notemos que como B es base de W, entonces todo $u \in W$ se escribe de manera única como

$$u = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i.$$

Es directo verificar que

$$P_j(a_i u_i) = \begin{cases} a_i u_i & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}.$$

De donde se tiene que $P(u) = u$. Luego $W \subseteq \mathrm{Im}(P)$. □

Ejercicio 3.2.12

Sea $C([-1,1], \mathbb{R})$ el espacio vectorial de funciones continuas de $[-1,1]$ con valores en $\mathbb{R}$ con el producto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t) \mathrm{d}t.$$

Sea $W \subseteq C([-1,1], \mathbb{R})$ el subespacio de funciones impares, es decir, tales que $f(t) = -f(-t)$. Calcule el complemento ortogonal $W^\perp$.

3.3. Dualidad y transformaciones adjuntas

Estudiaremos una aplicación de la existencia de bases ortonormales que permitirá describir dos tipos de transformaciones lineales en términos de un producto interno.

Definición 3.3.1: Funcional lineal

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Un **funcional lineal** es una transformación lineal

$$T \colon E \to \mathbb{K}.$$

Definición 3.3.2: Espacio dual

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. El dual de E es el espacio vectorial

$$E^* = \{T : T \text{ es un funcional lineal de } E\}.$$

Con la suma y multiplicación por escalar usuales.

Observación 3.5. En el caso de dimensión infinita, se pide además que los funcionales lineales sean **continuos** con respecto a la norma en el espacio E. En el caso de un espacio de dimensión finita, esto ocurre de manera automática, por lo cual no nos preocuparemos de esto.

El resultado que mostraremos a continuación caracterizará los funcionales lineales como aquellos que pueden representarse usando un producto interno. El resultado en el caso en que el producto interno de $\mathbb{R}^n$ es el producto escalar canónico es directo, como muestra el ejemplo siguiente.

Ejemplo 3.3.3

Sea $T \in (\mathbb{R}^n)^*$ un funcional lineal. Luego existe una matriz $A \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ tal que $T(x) = Ax$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Definiendo $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $y_k = A_{1,k}$ para $1 \leq k \leq n$ tenemos que

$$T(x) = Ax = \sum_{k=1}^{n} A_{1,k}x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k = \langle y, x\rangle.$$

Luego los elementos de $(\mathbb{R}^n)^*$ pueden representarse mediante el producto escalar usual.

Teorema 3.3.4: Teorema de representación de Riesz para dimensión finita

Sea E un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita con producto interno. Para todo funcional lineal $T \in E^*$ existe un único vector $y \in E$ tal que

$$T(x) = \langle x, y\rangle \text{ para todo } x \in E.$$

Demostración. Como $\dim(E) = n < \infty$, podemos utilizar el método de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de E. Definimos

$$y = \sum_{k=1}^{n} \overline{T(a_k)} a_k.$$

Sea $f_y \colon E \to \mathbb{C}$ definido por

$$f_y(x) = \langle x, y\rangle.$$

Es claro que f_y es un funcional lineal. Mostraremos que $T = f_y$. Para ello notemos que, puesto que $\{a_1, \ldots, a_n\}$ es ortonormal, entonces para todo $1 \leq k \leq n$ tenemos que

$$f_y(a_k) = \langle a_k, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle a_k, \overline{T(a_i)} a_i\rangle. = \sum_{i=1}^{n} T(a_i)\langle a_k, a_i\rangle. = T(a_k)\|a_k\|^2 = T(a_k).$$

Como f_y coincide con T en una base de E, se deduce que $f_y = T$. Esto muestra la existencia. Para ver que el vector es único, supongamos que existe $z \in E$ tal que para todo $x \in E$, $T(x) = \langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle$. Tendríamos entonces que $\langle x, y - z\rangle = 0$ para todo $x \in E$, en particular si tomamos $x = y - z$ obtenemos que $\|y - z\|^2 = 0$ por lo cual $y = z$. $\square$

Observación 3.6. Si $T \in E^*$ es tal que $T(x) = \langle x, y\rangle$ para un $y \in E$, entonces y está en el complemento ortogonal de $\ker(T)$. En efecto, si $T(x) = 0$ entonces $\langle x, y\rangle = 0$ por lo cual $y \in \ker(T)^\perp$.

Observación 3.7. Si T es un funcional lineal, entonces el complemento ortogonal $\ker(T)^\perp$ del núcleo de T tiene dimensión 1. En efecto, Sean $u, v \neq 0$ en $\ker(T)^\perp$, luego $T(u) \neq 0$ y $T(v) \neq 0$, por lo cual existe $c \in \mathbb{K}$ tal que $cT(u) = T(v)$ y luego $T(cu - v) = 0$, por lo cual $cu - v \in \mathrm{Ker}(T)$. Como $\mathrm{Ker}(T) \cap \ker(T)^\perp = \{0\}$ se obtiene que $v = cu$, luego $\dim(\ker(T)^\perp) = 1$.

De las observaciones anteriores se desprende que el representante de un operador es un vector del complemento ortogonal del núcleo de T. Una manera de encontrarlo es simplemente tomar un elemento z de norma 1 del complemento ortogonal y tomar $y = \overline{T(z)}z$.

Observación 3.8. El teorema anterior también es válido en dimensión infinita, pero requiere hipótesis extra de continuidad y regularidad del espacio: que el espacio de producto interno sea un "espacio de Hilbert".

El siguiente ejemplo muestra que en general el teorema de Riesz no vale en dimensión infinita.

Ejemplo 3.3.5

Sea $\mathcal{P}$ el espacio vectorial de los polinomios sobre $\mathbb{R}$ con el producto interno

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{1+k+j} a_k b_j.$$

Donde $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ y $q(t) = \sum_{j=0}^m b_j t^j$.
Podemos definir el funcional lineal $T\colon \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ mediante la evaluación $T(p) = p(1)$. Mostraremos que no existe ningún polinomio q tal que $T(p) = \langle p, q\rangle$ para todo $p \in \mathcal{P}$. En efecto, supongamos que existe un tal q, luego tendríamos que

$$p(1) = \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t \text{ para todo } p \in \mathcal{P}.$$

Sea $h(t) = t - 1$. Luego $T(hp) = h(1)p(1) = 0$ para todo $p \in \mathcal{P}$, de acá se sigue que si tomamos $p = h^2 q$ tendríamos que

$$0 = T(p) = \int_0^1 h(t)h(t)q(t)q(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 (h(t)q(t))^2 \mathrm{d}t.$$

Luego $h(t)q(t) = 0$. Como $h(t) \neq 0$, tenemos que $q = 0$ y entonces $T(p) = \langle p, 0\rangle = 0$ para todo $p \in \mathcal{P}$. Pero claramente T no es el funcional nulo, lo cual contradice la existencia de q.

Definición 3.3.6: Operador adjunto

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con producto interno y $T\colon E \to E$ un operador. Se dice que T tiene un **adjunto** si existe un operador $T^*\colon E \to E$ tal que

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle \text{ para todo } x, y \in E.$$

Observación 3.9. Notemos que la noción de adjunto de un operador, no depende únicamente del operador, sino que también del producto interno.

Proposición 3.3.7: Existencia del operador adjunto

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ con producto interno y $T\colon E \to E$ un operador. Entonces existe T^* y es único.

Observación 3.10. En el caso de un espacio de dimensión infinita, el operador adjunto no siempre existe, aunque de existir sí es único.

DEMOSTRACIÓN. Sea $y \in E$ arbitrario. Luego la aplicación $L\colon E \to \mathbb{K}$ dada por $L(x) = \langle Tx, y\rangle$ es un funcional lineal. Por el Teorema 3.3.4 tenemos que existe un único vector $\xi_y \in E$ tal que

$$L(x) = \langle Tx, y\rangle = \langle x, \xi_y\rangle.$$

Definamos $T^*\colon E \to E$ mediante $T^*(y) = \xi_y$. Luego tenemos que

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle.$$

Basta verificar que T^* es un operador. Para ello notemos que si $c \in \mathbb{K}$ e $y, z \in E$ entonces

$$\langle x, T^*(cy)\rangle = \langle T(x), cy\rangle = \overline{c}\langle T(x), y\rangle = \overline{c}\langle x, T^*(y)\rangle = \langle x, cT^*(y)\rangle.$$

$$\langle x, T^*(y+z)\rangle = \langle T(x), y+z\rangle = \langle T(x), y\rangle + \langle T(x), z\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle + \langle x, T^*(z)\rangle = \langle x, T^*(y) + T^*(z)\rangle.$$

Por lo cual T^* es el operador buscado. La unicidad es directa de la unicidad del representante en el teorema de representación de Riesz. $\square$

La proposición anterior asegura que en un espacio con producto interno de dimensión finita, el adjunto siempre existe. Lo que haremos a continuación es describir un modo para calcularlo.

Ejemplo 3.3.8

Sea $E = \mathbb{R}^n$ con el producto escalar. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ entonces su adjunto coincide con su transpuesta ($A^* = A^T$). En efecto, notemos que

$$\langle Ax, y\rangle = y^T Ax = x^T A^T y = \langle x, A^T y\rangle.$$

Si E es ahora $\mathbb{C}^n$ con el produco hermítico, entonces la adjunta de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ coincide con su transpuesta conjugada ($A^* = \overline{(A^T)}$). En efecto,

$$\langle Ax, y\rangle = \overline{y^T} Ax = x^T A^T \overline{y} = \overline{\overline{x^T A^T} y} = \overline{\langle \overline{A^T} y, x\rangle} = \langle x, \overline{A^T} y\rangle.$$

La siguiente proposición da una manera general de calcular el operador adjunto en un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Recordemos que denotamos por $[T]_{\mathcal{B}}$ a la matriz que represente a un operador T en la base $\mathcal{B}$.

Proposición 3.3.9: Fórmula para calcular el adjunto

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con producto interno de dimensión finita. Sea $L\colon E \to E$ un operador y $\mathcal{B}$ una base ortogonal de E. Entonces la representación de L^* en la base $\mathcal{B}$ es la conjugada transpuesta de la representación de L en la base $\mathcal{B}$.

$$[L^*]_{\mathcal{B}} = \overline{([L]_{\mathcal{B}})^T)}$$

Observación 3.11. Los ejemplos anteriores funcionan ya que la base canónica de $\mathbb{C}^n$ es ortonormal con respecto al producto hermítico canónico.

Demostración. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matriz que representa a un operador T en la base $\mathcal{B}$. Entonces tenemos que

$$T(b_i) = Ab_i = \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} b_k.$$

Como $\mathcal{B}$ es ortonormal, tomando producto interno con b_j tenemos que

$$\langle T(b_i), b_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} A_{k,i} \langle b_k, b_j \rangle = A_{j,i} \|b_j\|^2 = A_{j,i}.$$

De donde obtenemos que

$$A_{j,i} = \langle T(b_i), b_j \rangle.$$

Denotemos por A^* la matriz que representa a T^* en la base $\mathcal{B}$. Por lo anterior tenemos que

$$(A^*)_{j,i} = \langle T^*(b_i), b_j \rangle.$$

Basta mostrar que $\overline{(A^*)_{j,i}} = A_{i,j}$. En efecto, tenemos que

$$\overline{(A^*)_{j,i}} = \overline{\langle T^*(b_i), b_j \rangle} = \langle b_j, T^*(b_i) \rangle = \langle T(b_j), b_i \rangle = A_{i,j}.$$

Que es lo que queríamos probar. □

Ejercicio 3.3.10: Propiedades del operador adjunto

Sea E un espacio vectorial complejo con producto interno de dimensión finita. Pruebe que si T y U son operadores sobre E y $c \in \mathbb{C}$, entonces:

1. $(T+U)^* = T^* + U^*$.
2. $(cT)^* = \overline{c}T^*$.
3. $(TU)^* = U^*T^*$.
4. $(T^*)^* = T$.

Ejercicio 3.3.11

Sea E un espacio vectorial complejo de dimensión finita con producto interno y sea $T\colon E \to E$ un operador. Muestre que $\operatorname{Im}(T)^\perp = \operatorname{Ker}(T^*)$.

Ejercicio 3.3.12

Considere $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ como espacio vectorial con el producto interno

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(AB^*).$$

Dada $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, sea $T\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dado por $T(A) = PAP^{-1}$. Encuentre una fórmula para el operador adjunto T^*.

Ejercicio 3.3.13: [Difícil]

Sea $\mathcal{P}_3$ el espacio vectorial de todos los polinomios a coeficientes reales de grado a lo más 3. Considere el producto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

1. Sea $T\colon \mathcal{P}_3 \to \mathbb{R}$ el funcional lineal tal que $T(p) = p(1)$. Encuentre q tal que $T(p) = \langle p, q\rangle$.
2. Sea $D\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ el operador derivada, es decir el operador tal que

$$D(ax^2 + bx + c) = 2ax + b.$$

   Encuentre el operador adjunto D^*.

Ejercicio 3.3.14: [Difícil]

Sea $\mathbb{R}[x]$ el espacio (de dimensión infinita) de polinomios con coeficientes reales con el producto interno

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

Considere $D\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ el operador derivada. Muestre que D no posee adjunto.
Indicación: Por la fórmula de integración por partes, se tiene que

$$\langle Dp, q\rangle = p(1)q(1) - p(0)q(0) - \langle p, Dq\rangle.$$

Utilice lo anterior para mostrar que no existe el adjunto de D.

3.4. Transformaciones autoadjuntas

En esta sección estudiaremos transformaciones que coinciden con su adjunta y mostraremos que poseen propiedades espectrales muy robustas.

Definición 3.4.1: Operador hermítico o autoadjunto

Un operador $T\colon E \to E$ tal que $T = T^*$ se denomina **hermítico** o **autoadjunto**.

Ejercicio 3.4.2

Sea E un espacio vectorial complejo de dimensión finita con producto interno, y sea $T\colon E \to E$ un operador. Muestre que T es autoadjunto si y solamente si $\langle Tx, x\rangle$ es real para todo $x \in E$.

Ejercicio 3.4.3

Sea E un espacio vectorial complejo de dimensión finita y $T, U\colon E \to E$ dos operadores autoadjuntos. Demuestre que el operador TU es autoadjunto, si y solamente si T conmuta con U.

Un corolario de la Proposición 3.3.9 es que si L es un operador hermítico, entonces para toda base $\mathcal{B}$ ortonormal se tiene que

$$[L]_{\mathcal{B}} = \overline{([L^*]_{\mathcal{B}})^T} = \overline{([L]_{\mathcal{B}})^T}.$$

Luego la matriz que representa a L en $\mathcal{B}$ es autoadjunta con respecto al producto hermítico canónico para toda base $\mathcal{B}$. Esto justifica la notación A^* para denotar la conjugada de la transpuesta de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

A continuación mostraremos que los operadores (reales o complejos) autoadjuntos son siempre diagonalizables, todos sus valores propios son reales, y admiten una base ortonormal de vectores propios.

Proposición 3.4.4: Valores propios de un operador autoadjunto son reales

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con producto interno y $T\colon E \to E$ un operador autoadjunto. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de T, entonces $\lambda \in \mathbb{R}$

Demostración. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ es un valor propio de T, enotnces existe $v \in E \setminus \{0\}$ tal que $T(v) = \lambda v$. De aquí tenemos que

$$\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle T(v), v\rangle = \langle v, T(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle.$$

Como $v \neq 0$, entonces $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle \neq 0$ y obtenemos que $\lambda = \overline{\lambda}$. Luego $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Proposición 3.4.5: Ortogonalidad de vectores propios de operador autoadjunto

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con producto interno y $T\colon E \to E$ un operador autoadjunto. Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ son valores propios distintos asociados a vectores propios v_1, v_2, entonces $\langle v_1, v_2\rangle = 0$.

Demostración. Tenemos la siguiente seguidilla de igualdades

$$\lambda_1\langle v_1, v_2\rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2\rangle = \langle T(v_1), v_2\rangle = \langle v_1, T(v_2)\rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2\rangle = \overline{\lambda_2}\langle v_1, v_2\rangle.$$

Como los valores propios de un operador autoadjunto son reales, tenemos que $\overline{\lambda_2} = \lambda_2$. Luego se deduce que

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2\rangle = 0.$$

Luego, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, deducimos que $\langle v_1, v_2\rangle = 0$. □

Observación 3.12. Notemos que en las dos proposiciones precedentes no pedimos que la dimensión del espacio sea finita. Tampoco asumimos la existencia de un valor propio, tan solo decimos que de existir, son todos reales y sus vectores propios asociados son mutualmente ortogonales entre sí.

Observación 3.13. Si la dimensión del espacio es finita, todo operador admite un valor propio complejo. En particular, todo operador autoadjunto admite un valor propio real.

Lema 3.4.6

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con producto interno y $T\colon E \to E$ un operador. Si $W \subseteq E$ es un subespacio T-invariante, entonces $W^\perp$ es un espacio T^*-invariante.

Demostración. Sea $z \in W^\perp$, queremos demostrar que $T^*(z) \in W^\perp$, es decir, que para todo $w \in W$ se tiene que

$$\langle w, T^*(z)\rangle = 0.$$

En efecto, tenemos que $\langle w, T^*(z)\rangle = \langle T(w), z\rangle$. Como $w \in W$ y W es T-invariante, tenemos que $T(w) \in W$. Finalmente, como $z \in W^\perp$, tenemos que $\langle T(w), z\rangle = 0$. Luego $\langle w, T^*(z)\rangle = 0$. □

Teorema 3.4.7: Teorema espectral de operadores autoadjuntos

Sea $E \neq \{0\}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ de dimensión finita con producto interno y $T\colon E \to E$ un operador autoadjunto. Se tiene que E admite una base ortonormal de vectores propios de T.

DEMOSTRACIÓN. Sea $n = \dim(E)$. Si $n = 1$ el resultado es evidente, sea $n > 1$ y supongamos por inducción que el resultado es válido para un espacio de producto interno de dimensión a lo más $n - 1$.

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ un valor propio de T y v un vector propio asociado a λ con $\|v\| = 1$. Sea W el subespacio de E generado por v. Luego W es T-invariante. Por el Lema 3.4.6 tenemos que $W^{\perp}$ es T^*-invariante y como $T = T^*$, tenemos que $W^{\perp}$ es T-invariante.

De lo anterior deducimos que $W^{\perp}$ con el producto interno heredado de E es un espacio vectorial con producto interno de dimensión $n - 1$, ya que $\dim(W) = 1$ y $\dim(E) = \dim(W) + \dim(W^{\perp})$. Sea L la restricción de T a $W^{\perp}$, luego $L\colon W^{\perp} \to W^{\perp}$ es un operador autoadjunto y por hipótesis inductiva tenemos que $W^{\perp}$ admite una base ortonormal $\{b_2, \ldots, b_n\}$ de vectores propios de L.

Como $E = W \oplus W^{\perp}$, tenemos que $B = \{v, b_2, \ldots, b_n\}$ es una base ortonormal de E. Como cada b_j es un vector propio de L, en particular es un vector propio de T, luego $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de vectores propios de T. $\square$

En el caso de un espacio vectorial E sobre $\mathbb{R}$, es posible demostrar que el converso es también verdad, es decir, si $T\colon E \to E$ es un operador tal que E admite una base ortonormal de vectores propios de T, entonces T es autoadjunto.

En efecto, supongamos que E admite una base ortonormal $\mathcal{B}$ de vectores propios de T. Luego la matriz que representa a T en la base $\mathcal{B}$ es diagonal, digamos

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & c_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & c_n \end{bmatrix}.$$

Como $\mathcal{B}$ es ortonormal, tenemos que la representación de T^* en la base $\mathcal{B}$ es la conjugada transpuesta, es decir

$$[T^*]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \overline{c_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \overline{c_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \overline{c_n} \end{bmatrix}.$$

En el caso en que E es un espacio real, necesariamente tendríamos que $\overline{c_i} = c_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Luego $[T]_{\mathcal{B}} = [T^*]_{\mathcal{B}}$ lo cual implica que $T = T^*$. Este argumento nos permite enunciar el siguiente corolario.

Corolario 3.4.8: Bases ortonormales de vectores propios: caso real

Sea $E \neq \{0\}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita con producto interno y $T\colon E \to E$ un operador. E admite una base ortonormal de vectores propios de T si y solamente si T es autoadjunto.

Ejercicio 3.4.9

- Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz diagonalizable. Muestre que existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $B^2 = A$.
- Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz autoadjunta. Mostrar que existe una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $B^2 = A$.

- Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica real. Mostrar que existe una matriz simétrica real $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $B^3 = A$.
- Dar un ejemplo de una matriz simétrica real $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que no existe una matriz simétrica real B tal que $B^2 = A$.

En el caso de $\mathbb{R}^n$ con el producto punto, lo anterior se traduce de la manera siguiente.

Corolario 3.4.10: Matrices reales con base de vectores propios ortonormales

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. A es simétrica, es decir, $A = A^T$.
2. $\mathbb{R}^n$ admite una base ortonormal de vectores propios de A.

Observación 3.14. El equivalente del Corolario 3.4.8 no es verdad para espacios vectoriales complejos, incluso si son de dimensión finita. Existen operadores complejos que no son autoadjuntos y que admiten una base ortonormal de vectores propios. Más adelante veremos que la propiedad que caracteriza esto es que el operador sea **normal**, es decir que conmute con su adjunto.

Ejercicio 3.4.11

Sea $\mathbb{C}^2$ con el producto interno canónico y considere el operador dado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Note que la matriz A no es autoadjunta. Muestre que $\mathbb{C}^2$ admite una base de vectores propios de A ortonormales.

3.5. Isomorfismo de espacios con producto interno

A continuación estudiaremos la noción de isomorfismo para espacios vectoriales con producto interno.

Definición 3.5.1: Isomorfismo de espacios con producto interno

Sean $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ y $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle_F)$ dos espacios con producto interno. Una transformación lineal $T\colon E \to F$ **preserva producto interno** si para todo $x, y \in E$ se tiene que $\langle x, y\rangle_E = \langle Tx, Ty\rangle_F$. Un **isomorfismo** de espacios con producto interno es una transformación lineal biyectiva que preserva productos internos.

Si existe un tal isomorfismo entre $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ y $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle_F)$, decimos que $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ y $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle_F)$ son **isomorfos**.

Observación 3.15. Si $T\colon E \to F$ preserva producto interno, entonces

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 \text{ para todo } x \in E.$$

En particular, $\operatorname{Ker}(T) = \{0_E\}$.

Proposición 3.5.2: Equivalencias isomorfismo

Sean $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ y $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle_F)$ dos espacios con producto interno de la misma dimensión (finita). Sea $T\colon E \to F$ una transformación lineal. Son equivalentes

1. T preserva el producto interno.
2. T es un isomorfismo de espacios con producto interno.
3. La imagen bajo T de toda base ortonormal de E es una base ortonormal de F.
4. La imagen bajo T de alguna base ortonormal de E es una base ortonormal de F.

Demostración. (1) $\implies$ (2) Si T preserva el producto interno, entonces $\dim(\mathrm{Ker}(T)) = 0$ y T es inyectiva. Por el teorema de rango nulidad, tenemos que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(T)) = \dim(E) = \dim(F)$. Luego T es sobreyectiva. Obtenemos que T es un isomorfismo.

(2) $\implies$ (3) Supongamos que T es isomorfismo de espacio con producto interno y sea $\{b_1, \ldots, b_n\}$ una base ortonormal de E. Luego $\|Tb_i\|_F = \|b_i\|_E = 1$ y si $i \neq j$ $\langle Tb_i, Tb_j\rangle_F = \langle b_i, b_j\rangle_E = 0$. Luego $\{Tb_1, Tb_2, \ldots, Tb_n\}$ es base ortonormal de F. (3) $\implies$ (4) es trivial.

(4) $\implies$ (1). Supongamos que existe una base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ una base ortonormal de E tal que $\{Tb_1, Tb_2, \ldots, Tb_n\}$ es base ortonormal de F. Luego dados $x, y \in E$ podemos escribir

$$x = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k, \quad y = \sum_{k=1}^{n} c_k b_k.$$

De este modo

$$\langle x, y\rangle_E = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \langle a_i b_i, c_k b_k\rangle_E = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{c_k} \|b_k\|_E^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{c_k}.$$

Por otro lado, como $\{Tb_1, Tb_2, \ldots, Tb_n\}$ es base ortonormal de F tenemos que

$$\langle Tx, Ty\rangle_F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \langle a_i T(b_i), c_k T(b_k)\rangle_F = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{c_k} \|T(b_k)\|_F^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k \overline{c_k}.$$

De donde obtenemos que

$$\langle x, y\rangle_E = \langle Tx, Ty\rangle_F.$$

□

Ejemplo 3.5.3

Sea $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ un espacio vectorial complejo con producto interno de dimensión finita y sea $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base ortonormal de E. Consideremos la transformación lineal $T\colon E \to \mathbb{C}^n$ dada por

$$T(b_i) = e_i \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Por la proposición anterior, como $\dim(E) = \dim(\mathbb{C}^n)$ y T envía alguna base ortonormal ($\mathcal{B}$) de E a una base ortonormal ($\{e_1, \ldots, e_n\}$) de $\mathbb{C}^n$, tenemos que T es un isomorfismo de espacios vectoriales con producto interno. Luego $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ es isomorfo a $\mathbb{C}^n$ con el producto canónico. Si E es un espacio vectorial real, entonces $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle_E)$ es isomorfo a $\mathbb{R}^n$ con el producto punto.

Definición 3.5.4: Transformación unitaria

Un operador $T\colon E \to E$ se dice **unitario** si su adjunto T^* existe y se tiene que

$$TT^* = T^*T = \mathrm{id}\,.$$

Proposición 3.5.5

Un operador $T\colon E \to E$ es unitario si y solamente si T es un isomorfismo de espacio vectorial con producto interno $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en sí mismo.

Demostración. Supongamos que T es unitario, luego T^* existe y $TT^* = T^*T = \mathrm{id}$. Luego T^{-1} existe y $T^{-1} = T^*$. De acá obtenemos que T es biyectiva. Tenemos además que

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, T^*Ty \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Luego preserva el producto interno. Esto muestra que T es isomorfismo.

Inversamente, si T es isomorfismo, entonces T^{-1} existe. Como T preserva el producto interno tenemos que

$$\langle Tx, y \rangle = \langle Tx, TT^{-1}y \rangle = \langle x, T^{-1}y \rangle.$$

De donde se obtiene que $T^* = T^{-1}$. Luego T es unitario. □

Ejemplo 3.5.6

Sea $\mathbb{R}^n$ con el producto punto canónico y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A define un operador unitario, esto simplemente dice que $AA^T = A^TA = I$.

Un ejemplo de operador unitario en $\mathbb{R}^2$ está dado por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad \text{para } \theta \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 3.5.7

Sea $\mathbb{C}^n$ con el producto canónico y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si A define un operador unitario, esto simplemente dice que $AA^* = A^*A = I$. Es decir

$$(AA^* = I) \quad \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}A^*_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}\overline{A_{j,k}} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

$$(A^*A = I) \quad \sum_{k=1}^{n} A^*_{i,k}A_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{k,j}\overline{A_{k,i}} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

La primera condición dice que las filas forman una base ortonormal. La segunda condición dice que las columnas forman una base ortonormal. Notemos que éstas condiciones son equivalentes a que A defina un operador unitario sobre la base canónica.

Definición 3.5.8: Transformaciones unitariamente equivalentes

Dos operadores $T\colon E \to E$ y $L\colon E \to E$ se dicen **unitariamente equivalentes** si existe un operador unitario $U\colon E \to E$ tal que

$$T = ULU^*.$$

Ejercicio 3.5.9

Sea $\theta \in [0, 2\pi)$. Muestre que las matrices siguientes son unitariamente equivalentes sobre $\mathbb{C}^2$

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.5.10

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz autoadjunta. Luego sabemos que es diagonalizable, los valores propios son reales y $\mathbb{C}^n$ admite una base ortonormal de vectores propios de A. En particular, si los ordenamos en una matriz P tenemos que P es unitaria y por lo tanto $P^{-1} = P^*$. Luego podemos escribir

$$A = PDP^*.$$

En el caso en que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, podemos ir más allá y simplemente escribir

$$A = PDP^T.$$

En otras palabras, las matrices autoadjuntas son unitariamente equvialentes a una matriz diagonal real.

3.6. Operadores normales y teorema espectral

En el caso en que E es un espacio vectorial real, demostramos que la condición de que T sea autoadjunto es equivalente a que E admita una base de vectores propios ortonormal de T. Sin embargo, como comentamos anteriormente, lo anterior es falso en el caso de un espacio vectorial complejo.

Ejemplo 3.6.1

Sea $E = \mathbb{C}^2$ con el producto interno canónico. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

Tenemos que A no es autoadjunta, pero $\mathbb{C}^2$ si admite una base ortonormal de vectores propios de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Lo que sucede en el caso de un operador complejo que admite una base de vectores propios ortonormal, es que los valores propios pueden ser complejos. En este caso tenemos que

$$A^* = (PDP^*)^* = PD^*P^*.$$

En el caso en que los valores propios son reales, tenemos que $D = D^*$ y por lo tanto $A = A^*$. En el caso complejo esto no se cumple necesariamente. Sin embargo, notemos que siempre tenemos lo siguiente

$$AA^* = PDP^*PD^*P^* = PDD^*P^* = PD^*DP^* = PD^*P^*PDP^* = A^*A.$$

Luego el operador inducido por A necesariamente debe conmutar con el inducido por la matriz adjunta de A. Esto motiva la definición siguiente.

Definición 3.6.2: Operadores normales

Sea E un espacio vectorial con producto interno. Un operador $T\colon E \to E$ se dice **normal** si su adjunto existe y
$$TT^* = T^*T.$$

Los operadores unitarios son casos especiales de operadores normales donde además se tiene que $TT^* = T^*T = \mathrm{id}$.

Ejercicio 3.6.3

Sea E un espacio vectorial complejo de dimensión finita con producto interno y sea $T\colon E \to E$ un operador normal. Muestre que $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$ para todo $x \in E$. Concluya que $\mathrm{Ker}(T) = \ker(T^*)$.

Mostraremos que en el caso de un operador complejo, la condición de ser un operador normal caracteriza la existencia de una base de vectores propios ortonormales.

Ejemplo 3.6.4

No es verdad que en un espacio real un operador normal admita una base de vectores propios ortonormales, esto ya que podría ni siquiera tener valores propios reales. Por ejemplo
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Cumple que $AA^T = A^TA = I$ (es unitario), pero A no admite valores propios reales.

Necesitaremos los siguientes resultados preliminares. En los tres lemas siguientes $T\colon E \to E$ es un operador en un espacio vectorial E complejo de dimensión finita con un producto interno.

Lema 3.6.5

Si T es un operador normal, entonces λ es valor propio de T con vector propio v si y solamente si $\overline{\lambda}$ es valor propio de T^* con vector propio v.

Demostración. Sea $U = T - \lambda I$. Verificamos que $U^* = T^* - \overline{\lambda} I$. Como $TT^* = T^*T$, el operador U es normal ya que
$$UU^* = (T - \lambda I)(T^* - \overline{\lambda} I) = TT^* - \lambda T - \overline{\lambda} T^* + |\lambda|^2 I = (T^* - \overline{\lambda} I)(T - \lambda I) = U^*U.$$
Por el Ejercicio 3.6.3, tenemos que $\|Uv\| = \|U^*v\|$. Como $Uv = Tv - \lambda v$ y $U^*v = T^*v - \overline{\lambda} v$, deducimos que $Tv = \lambda v$ si y solamente si $T^*v = \overline{\lambda} v$. □

Lema 3.6.6

Si $\mathcal{B}$ una base ortonormal del espacio E tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ es triangular superior. Entonces $[T]_{\mathcal{B}}$ es diagonal si y solamente si T es normal.

Demostración. Llamemos $A = [T]_{\mathcal{B}}$, de este modo $[T^*]_{\mathcal{B}} = A^*$. Si A es diagonal, entonces claramente $AA^* = A^*A$ y tenemos que T es normal.

Supongamos ahora que T es normal y llamemos $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$, como A es triangular superior, tenemos que $Tb_1 = A_{1,1}b_1$. Por el Lema 3.6.5 tenemos que $T^*b_1 = \overline{A_{1,1}}b_1$. Por otro lado,

$$T^*b_1 = \sum_{k=1}^{n} (A^*)_{k,1} b_i = \sum_{k=1}^{n} \overline{A_{1,k}} b_i.$$

Luego $A_{1,k} = 0$ para todo $k \geq 2$. De acá obtenemos que $Tb_2 = A_{1,2}b_1 + A_{2,2}b_2 = A_{2,2}b_2$. Repitiendo el argumento se obtiene $A_{i,j} = 0$ para $j > i$ y por lo tanto que A es diagonal. □

Lema 3.6.7

Existe $\mathcal{B}$ una base ortonormal del espacio tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ es triangular superior.

Demostración. Sea $\mathcal{B}'$ una base de abanico para T. Luego $[T]_{\mathcal{B}'}$ es triangular superior. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt a $\mathcal{B}'$ obtenemos una base $\mathcal{B}$ ortonormal, y puede verificarse que $[T]_{\mathcal{B}}$ sigue siendo triangular superior. □

Teorema 3.6.8: Teorema espectral para operadores normales

Sea E un espacio vectorial complejo de dimensión finita con producto interno y sea $T\colon E \to E$ un operador normal. Entonces E admite una base ortonormal de vectores propios de T.

Demostración. Por el Lema 3.6.7, existe una base ortonormal $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ es triangular superior. Como T es normal, entonces $[T]_{\mathcal{B}}$ es diagonal. Llamemos $D = [T]_{\mathcal{B}}$. Por definición tenemos que $Tb_i = \sum_{k=1}^{n} D_{k,i}b_k = D_{i,i}b_i$ y se deduce que b_i es vector propio de T. Luego $\mathcal{B}$ es una base ortonormal de vectores propios de T. □

Ejercicio 3.6.9

Sea E un espacio vectorial complejo de dimensión finita con producto interno, y sea $T\colon E \to E$ una proyección ($T^2 = T$). Muestre que son equivalentes:

1. T es autoadjunto.
2. T es normal.
3. $\operatorname{Im}(T)$ es ortogonal a $\operatorname{Im}(\operatorname{id} - T)$.

Capítulo 4

Representación de formas

4.1. Formas bilineares y sesquilineares

Recordemos la definición de forma sesquilineal

Definición 4.1.1: Forma sesquilineal

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Una **forma sesquilineal** sobre E es una función $f\colon E \times E \to \mathbb{C}$ que satisface lo siguiente:

1. $f(x, y+z) = f(x, y) + f(x, z)$ y $f(x+y, z) = f(x, z) + f(y, z)$, para todo $x, y, z \in E$.
2. $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$ y $f(x, \lambda y) = \overline{\lambda} f(x, y)$, para todo $x, y \in E$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

En el caso en que E es un espacio vectorial real, entonces la segunda condición se puede escribir $f(\lambda x, y) = f(x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$ y la forma se denomina **bilineal**. Usualmente hablaremos simplemente de **formas**, y daremos por entendido que se trata de una forma bilineal en el caso real, y una forma sesquilinear en el caso complejo.

Observación 4.1. si f y g son formas sobre un espacio E. Entonces $f + g$ también es una forma. Del mismo modo una forma multiplicada por un escalar es también una forma, luego el espacio de las formas lineales es un espacio vectorial.

Ejercicio 4.1.2

Sea $\mathbb{C}^n$ con el producto interno canónico. Muestre que toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ define una forma sesquilineal mediante

$$f_A(x, y) = \langle Ax, y \rangle = \overline{y^T} Ax.$$

Hoy nos interesaremos en representar formas bilineales en espacios de producto interno mediante operadores.

Teorema 4.1.3: Representación de formas sesquilineales

Sea E un espacio vectorial complejo de dimensión finita y con producto interno. Para toda forma sesquilinear $f\colon E \times E \to \mathbb{C}$ existe un único operador $T\colon E \to E$ tal que

$$f(x, y) = \langle Tx, y \rangle \text{ para todo } x, y \in E.$$

Demostración. Fijemos $x \in E$. Luego la transformación $g_y\colon E \to \mathbb{C}$ dada por $g_y(x) = f(x, y)$ es lineal. Por el teorema de Riesz, existe un vector $\bar{y}$ tal que $g_y(x) = \langle x, \bar{y} \rangle$ para todo $x \in E$.

Definamos una función $U\colon E \to E$ dada por $U(y) = \bar{y}$. De este modo para todo $x, y \in E$ tenemos que $g_y(x) = f(x, y) = \langle x, U(y) \rangle$. Mostraremos que U es un operador.

Notemos que para todo $x, y, z \in E$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$\langle x, U(\lambda y + z)\rangle = f(x, \lambda y + z) = \overline{\lambda} f(x, y) + f(x, z) = \overline{\lambda}\langle x, U(y)\rangle + \langle x, U(z)\rangle = \langle x, \lambda U(y)\rangle + \langle x, U(z)\rangle.$$

De donde se obtiene que $U(\lambda y + z) = \lambda U(y) + U(z)$, por lo cual U es un operador sobre E. Como E es de dimensión finita, el adjunto $T = U^*$ existe y tenemos que para todo $x, y \in E$

$$f(x, y) = \langle Tx, y\rangle.$$

Para probar la unicidad, supongamos que existe un operador $T' \colon E \to E$ tal que $f(x, y) = \langle T'x, y\rangle$ para todo $x, y \in E$. Luego

$$\langle (T - T')x, y\rangle = 0 \text{ para todo } x, y \in E.$$

De donde $T = T'$. $\square$

Observación 4.2. La aplicación φ que toma una forma f y le asocia un operador $\varphi(f) = T_f$ tal que $f(x, y) = \langle Tx, y\rangle$ es un isomorfismo entre el espacio de formas y el espacio de operadores de E. En efecto, si f, g son formas y $\lambda \in \mathbb{C}$ es un escalar entonces para todo $x, y \in E$

$$\langle \varphi(\lambda f + g)x, y\rangle = (\lambda f + g)(x, y) = \lambda f(x, y) + g(x, y) = \langle \lambda\varphi(f)x, y\rangle + \langle \varphi(g)x, y\rangle = \langle (\lambda\varphi(f) + \varphi(g))x, y\rangle.$$

Luego $\varphi(\lambda f + g) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g)$ y tenemos que φ es una transformación lineal. Como cada operador T define una forma f_T mediante $f_T(x, y) = \langle Tx, y\rangle$, la aplicación φ es sobreyectiva. Por unicidad de la forma tenemos también que φ es inyectiva, luego φ es un isomorfismo.

Definición 4.1.4: Matriz representante de una forma

Sea $f \colon E \to E$ una forma en un espacio de dimensión finita E y sea $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ una base de E. La **matriz representante** A de f en la base E está dada por

$$A_{i,j} = f(b_j, b_i).$$

Observación 4.3. Si A es la matriz representante de f en la base $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$, entonces dados $x = \sum_{k=1}^n a_k b_k$ e $y = \sum_{j=1}^n c_j b_j$ tenemos que

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k \overline{c_j} f(b_k, b_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k \overline{c_j} A_{j,k}.$$

Tomando $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ y $\gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ tenemos que $f(x, y) = \overline{\gamma^T} A\alpha$.

Observación 4.4. Si A es la matriz representante de f en una base ortonormal $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ y T_f es tal que $f(x, y) = \langle T_f x, y\rangle$ para todo $x, y \in E$, entonces tenemos que $A_{i,j} = f(b_j, b_i) = \langle T_f b_j, b_i\rangle$. Luego $A = [T_f]_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 4.1.5

Sea $E = \mathcal{P}_2$ el espacio de polinomios a coeficientes reales de grado a lo más 2 con el producto interno dado por $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$.
Considere la forma bilineal dada por $f(p, q) = p(0)q(1) + p(1)q(0)$. Encuentre la matriz representante de f en la base $\{1, x, x^2\}$.
¿Es importante la elección de producto interno en este ejercicio?

Recordemos que una forma es Hermítica si $f(x,y) = \overline{f(y,x)}$. En el caso real decimos que es simétrica.

Teorema 4.1.6: Teorema del eje principal

Si f es una forma Hermítica en un espacio E con producto interno de dimensión finita, entonces existe una base ortonormal de E tal que la repesentación matricial de f en esa base es una diagonal con elementos reales.

Demostración. Sea T_f el operador tal que $f(x,y) = \langle T_f x, y\rangle$ para todo $x, y \in E$. Como f es Hermítica tenemos que

$$\langle T_f x, y\rangle = f(x,y) = \overline{f(y,x)} = \overline{\langle T_f y, x\rangle} = \langle x, T_f y\rangle.$$

Luego T_f es un operador autoadjunto. Por el teorema espectral se deduce que existe una base ortonormal $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ de E formada por vectores propios de T_f. Sea A la matriz representante de f en la base $\mathcal{B}$. Luego, si tomamos λ_j el valor propio asociado a b_j

$$A_{i,j} = f(b_j, b_i) = \langle T_f b_j, b_i\rangle = \lambda_j \langle b_j, b_i\rangle = \begin{cases} \lambda_j & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}.$$

Como los valores propios de un operador autoadjunto son reales, tenemos que A es una matriz diagonal con entradas reales. □

Ejercicio 4.1.7

Consideremos $\mathbb{R}^2$ y la forma f dada por

$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 4x_2y_2.$$

Encuentre una base de $\mathbb{R}^2$ tal que la matriz representante de f en la base es diagonal.

Definición 4.1.8: Formas no degeneradas

Sea E un espacio vectorial complejo y sea f una forma sobre E. Decimos que

1. f es **no degenerada a la izquierda** si cada vez que $f(x,y) = 0$ para todo $y \in E$, entonces $x = 0$.
2. f es **no degenerada a la derecha** si cada vez que $f(x,y) = 0$ para todo $x \in E$, entonces $y = 0$.

Ejercicio 4.1.9

Sea E un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita, f una forma y T el operador asociado tal que $f(x,y) = \langle Tx, y\rangle$ para todo $x, y \in E$. Muestre que f es no degenerada si y solamente si T no es singular (a la izquierda).

Ejercicio 4.1.10

Suponga que E es de dimensión finita. Muestre que una forma f es no degenerada a la izquierda si y solamente si es no degenerada a la derecha.

De acuerdo al resultado del ejercicio anterior, diremos simplemente que f es **no degenerada** si cumple una de las dos condiciones equivalentes.

Ejercicio 4.1.11: Riesz para formas no degeneradas

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y f una forma no degenerada. Muestre que para todo funcional lineal $L\colon E \to \mathbb{C}$ existe un único $y \in E$ tal que

$$L(x) = f(x, y) \text{ para todo } x \in E.$$

Ejercicio 4.1.12: Adjunto para formas no degeneradas

Sea E un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y f una forma no degenerada. Muestre que para todo operador $T\colon E \to E$ existe un operador $T^\star\colon E \to E$ tal que

$$f(T(x), y) = f(x, T^\star y) \text{ para todo } x, y \in E.$$

4.2. Formas cuadráticas

Definición 4.2.1: Forma cuadrática

Una **forma cuadrática** es una función $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} c_{i,j} x_i x_j.$$

En palabras más simples, una forma cuadrática es un polinomio en n variables $x_1, \ldots, x_n$ tal que todos sus términos tienen grado 2. A continuación veremos que siempre pueden representarse mediante matrices simétricas.

Ejemplo 4.2.2

$f(x) = \|x\|^2$ es una forma cuadrática.

Ejemplo 4.2.3

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Luego $f(x) = x^T A x$ es una forma cuadrática.

Proposición 4.2.4

Sea $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática. Entonces existe una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica tal que $f(x) = x^T A x$.

Demostración. Sea $f(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=i}^n c_{i,j}x_ix_j$. Definamos $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ mediante

$$A_{i,j}=\begin{cases} c_{i,i} & \text{if } i=j\\ \frac{c_{i,j}}{2} & \text{if } j>i\\ \frac{c_{j,i}}{2} & \text{if } i<j.\end{cases}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
x^TAx &= \sum_{i=1}^n x_i\sum_{j=1}^n A_{i,j}x_j\\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{i-1}\frac{c_{j,i}}{2}x_ix_j+\sum_{i=1}^n c_{i,i}x_i^2+\sum_{i=1}^n\sum_{j=i+1}^n\frac{c_{i,j}}{2}x_ix_j\\
&= \sum_{j=1}^n\sum_{i=j+1}^n\frac{c_{j,i}}{2}x_ix_j+\sum_{i=1}^n c_{i,i}x_i^2+\sum_{i=1}^n\sum_{j=i+1}^n\frac{c_{i,j}}{2}x_ix_j\\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=i+1}^n\frac{c_{i,j}}{2}x_ix_j+\sum_{i=1}^n c_{i,i}x_i^2+\sum_{i=1}^n\sum_{j=i+1}^n\frac{c_{i,j}}{2}x_ix_j\\
&= \sum_{i=1}^n c_{i,i}x_i^2+\sum_{i=1}^n\sum_{j=i+1}^n c_{i,j}x_ix_j\\
&= f(x_1,\ldots,x_n).
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 4.2.5

Escriba $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2-2x_1x_2+6x_2x_3$. Encuentre una matriz simétrica $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $f(x)=x^TAx$.

Podemos aplicar el teorema del eje principal para representar las formas cuadráticas mediante una diagonal. Notemos que si $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es una forma cuadrática dada por $f(x)=x^TAx$ y $U\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ es un operador, entonces $f\circ U$ es una forma cuadrática dada por $(f\circ U)(x)=x^TU^TAUx$.

Teorema 4.2.6: Teorema del eje central para formas cuadráticas

Sea f una forma cuadrática. Entonces existe una matriz unitaria U tal que si $y=Ux$, entonces $f(x)=y^TDy$ con D una matriz diagonal.

Demostración. Como f es forma cuadrática, existe una matriz simétrica real $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $f(x)=\langle Ax,x\rangle$. Por el teorema espectral tenemos que $A=PDP^T$ para una matriz unitaria P y una matriz diagonal real D. Tomando $U=P^T$ tenemos que

$$f(x)=f(Py)=(Py)^TA(Py)=y^T(P^TAP)y=y^TDy.$$

□

Ejercicio 4.2.7

Sea $f(x_1,x_2)=x_1^2-8x_1x_2+2x_2^2$. Encuentre un cambio de variable $y=Ux$ tal que la forma escrita en términos de y se represente por una matriz diagonal D, es decir, $f(x)=y^TDy$.

Consideremos una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2.$$

Podemos escribirla de la manera siguiente

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Por el teorema del eje central, existe una matriz unitaria $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que si $y = Ux$ entonces $Q(x) = y^T Dy$ con D una matriz diagonal. Es decir, $Q(x) = \alpha y_1^2 + \beta y_2^2$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4.2.8

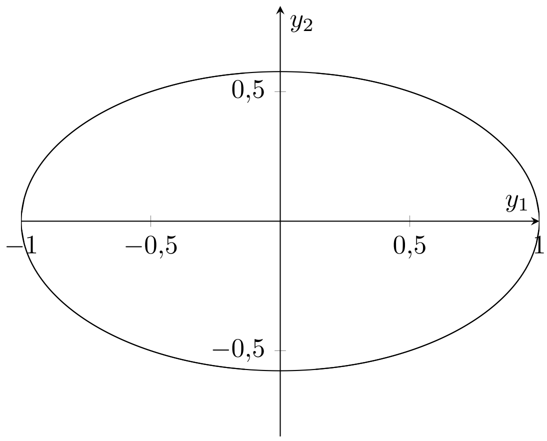
Muestre que si U es una matriz unitaria en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ entonces es de la forma

$$U = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ o } U = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ para algún } \theta \in [0, 2\pi).$$

Concluya que un cambio de variables como el del teorema del eje central en $\mathbb{R}^2$ corresponde a una rotación más una reflexión con respecto a $y = 0$.

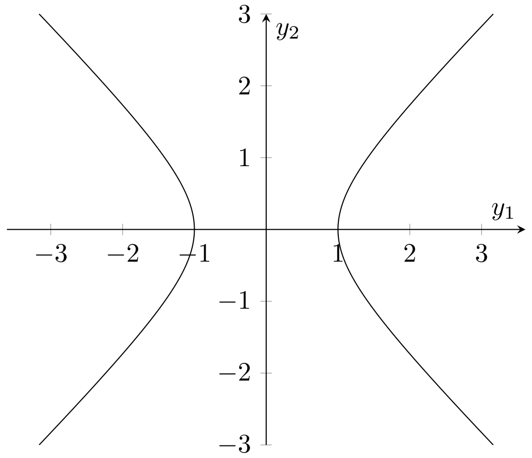
Consideremos la ecuación $1 = Q(x) = \alpha y_1^2 + \beta y_2^2$. El conjunto de puntos $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen la ecuación es:

1. Una **elipse** si $\alpha, \beta > 0$.



$$1 = 3y_1^2 + y_2^2$$

2. Una **hipérbola** si $\alpha\beta < 0$.



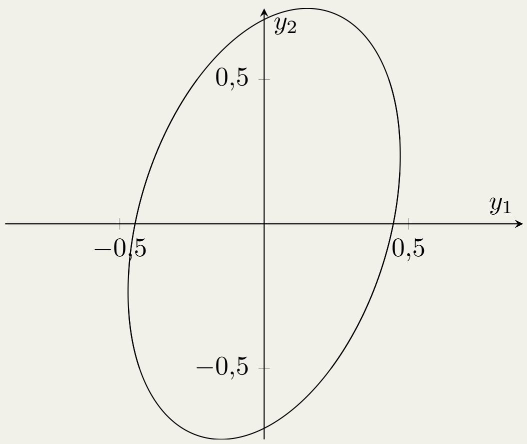
$$1 = y_1^2 - y_2^2$$

3. En los casos restantes el conjunto de puntos es o bien vacío o es una cantidad finita de puntos.

Deshaciendo el cambio de variables, podemos interpretar una curva de nivel de una cuadrática de la forma $1 = x^T Ax$ como una elipse o hipérbola rotada.

Ejemplo 4.2.9

Los puntos determinados por la ecuación $1 = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$ representan una elipse rotada



$$1 = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

Lo anterior puede determinarse analíticamente analizando los valores propios de la matriz simétrica que representa la forma cuadrática asociadada. En este caso $Q(x_1, x_2) = 5x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2$ está representada por

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Y se puede verificar que ambos valores propios son positivos.

Notemos que si ambos valores propios de una matriz simétrica A tal que $Q(x) = x^T Ax$ son positivos, entonces $1 = Q(x)$ describe una elipse rotada pues un cambio de variable unitario la convierte en una elipse. Del mismo modo un valor propio positivo y uno negativo la hace una hipérbola rotada.

Lo anterior motiva la definición siguiente.

Definición 4.2.10: Tipos de formas cuadráticas

Una forma cuadrática $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es

1. **Definida positiva** si $Q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
2. **Definida negativa** si $Q(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
3. **Indefinida** si no es definida positiva ni definida positiva.

De manera coherente, diremos que una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es **definida positiva** si la forma cuadrática $Q(x) = x^T Ax$ es definida positiva y que A es **definida negativa** si $Q(x) = x^T Ax$ es definida negativa.

Proposición 4.2.11

Sea $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática dada por $Q(x) = x^T Ax$ para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simétrica. Se tiene que

1. Q es definida positiva si y solamente si todos los valores propios de A son positivos.
2. Q es definida negativa si y solamente si todos los valores propios de A son negativos.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ los valores propios de A. Por el teorema de los ejes principales, tenemos que existe un operador invertible $U\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que si $y = Ux$ entonces

$$Q(x) = y^T D y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

Si Q es definida positiva, tenemos que $Q(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. En particular tomando x_i tal que $Ux_i = e_i$ obtenemos que $\lambda_i = Q(x_i) > 0$. Luego todos los valores propios son positivos. Al contrario, si todo λ_i es positivo, tenemos que $Q(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 > 0$ salvo si $y = 0$, lo cual ocurre solo cuando $x = 0$ ya que U es invertible.

El segundo caso notamos que $-Q(x) = x^T(-A)x$ es definida positiva si y solamente si $Q(x)$ es definida positiva. Luego el resultado anterior muestra que $-Q(x)$ es definida positiva si y solamente sí los valores propios de $-A$ son todos positivos. Luego $Q(x)$ es definida negativa si y solamente si todos los valores propios de A son negativos. □

Ejercicio 4.2.12

Determine si $Q(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ es una forma cuadrática definida positiva.

Observación 4.5. En el caso de una matriz autoadjunta $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, diremos que es **definida positiva** si todos sus valores propios son positivos (recordemos que siempre son reales).

Lo que hemos demostrado es que si representamos un producto interno mediante una matriz autoadjunta, entonces todos sus valores propios son positivos.

Observación 4.6. Una importancia de las matrices definidas positivas, aparte de que pueden usarse para definir productos internos, es que admiten una descomposición importante llamada **descomposición de Cholesky**.

Más precisamente si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es autoadjunta definida positiva, entonces existe una matriz $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangular inferior con entradas reales y positivas en la diagonal tal que $A = LL^*$. Esta escomposición es de gran utilidad en aplicaciones numéricas tales como la resolución de ecuaciones lineales de muchas variables.

Ejercicio 4.2.13

Considere el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ y sea $f\colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dada por

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2\overline{y_1}x_1 + 2i\overline{y_1}x_2 - 2i\overline{y_2}x_1 - 8\overline{y_2}x_2.$$

1. Determine una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ tal que

$$f(x, y) = \langle Ax, y \rangle$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto interno canónico de $\mathbb{C}^2$. Concluya que f es una forma sesquilineal.
2. Determine si f es Hermítica.
3. Determine si $Q(x_1, x_2) = f((x_1, x_2), (x_1, x_2))$ es una forma cuadrática definida positiva.
4. ¿Es f un producto interno sobre $\mathbb{C}^2$?

Ejercicio 4.2.14: [Difícil]

Sea Q una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$. Definamos

$$m = \text{mín}\{Q(x) : \|x\| = 1\}, \quad M = \text{máx}\{Q(x) : \|x\| = 1\}.$$

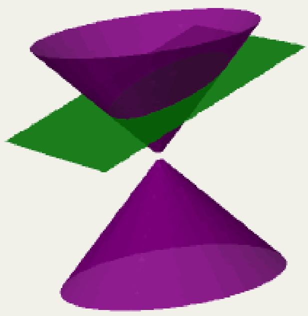
Sean $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ los valores propios de la matriz simétrica que representa a Q ordenados de menor a mayor. Muestre que $m = \lambda_1$ y $M = \lambda_n$.

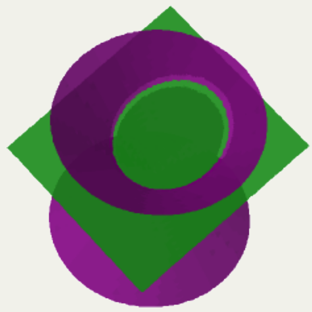
4.3. Secciones cónicas

Una sección cónica es el conjunto de puntos que se obtiene al intersectar en $\mathbb{R}^3$ el cono $z^2 = x^2 + y^2$ con un plano de la forma $ax + by + cz = d$ y proyectarlos en el plano.

Ejemplo 4.3.1

En la imagenes siguientes se muestra la intersección del cono $z^2 = x^2 + y^2$ en morado con el plano en verde determinado por la ecuación $\frac{3}{10}x + z = 1$.





Puede apreciarse que en este caso la intersección de ambas figuras es una elipse.

En esta sección nos enfocaremos en describir las secciones cónicas de una manera puramente algebraica.

Definición 4.3.2: Sección cónica

Una **sección cónica** es un conjunto de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisface una ecuación de la forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

En términos matriciales, podemos describir una sección cónica mediante la ecuación siguiente

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{parte cuadrática}} + \underbrace{\begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{parte lineal}} + F = 0$$

La parte cuadrática ya fue estudiada en la sección anterior. Notemos que también podemos escribir la ecuación de la cónica como la proyección de una forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

En lo que sigue denotaremos por M y Q las matrices

$$M = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} & \frac{D}{2} \\ \frac{B}{2} & C & \frac{E}{2} \\ \frac{D}{2} & \frac{E}{2} & F \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix}.$$

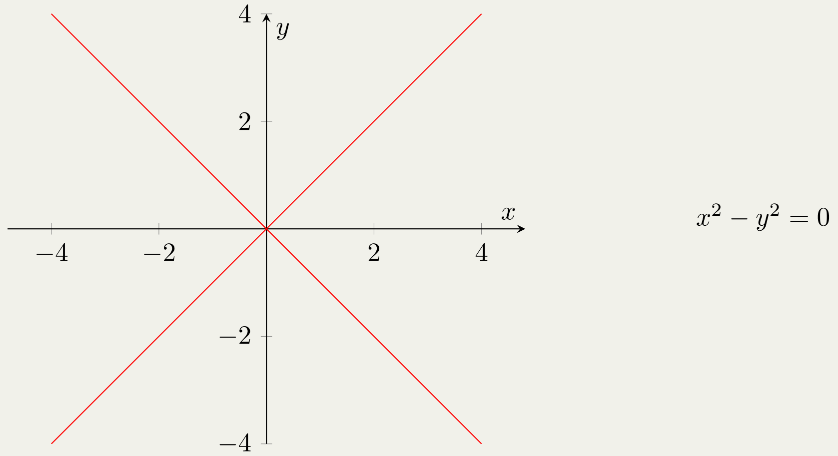
Para clasificar cónicas necesitaremos la definición siguiente

Definición 4.3.3: Cónica degenerada

Una sección cónica es **degenerada** si su ecuación puede reescribirse como el producto de dos polinomios lineales sobre $\mathbb{C}$.

Ejemplo 4.3.4

La sección cónica dada por $x^2 - y^2 = 0$ es degenerada pues puede reescribirse como $(x+y)(x-y)$. El conjunto de puntos que describe está dado por la unión de las rectas $y = x$ e $y = -x$.

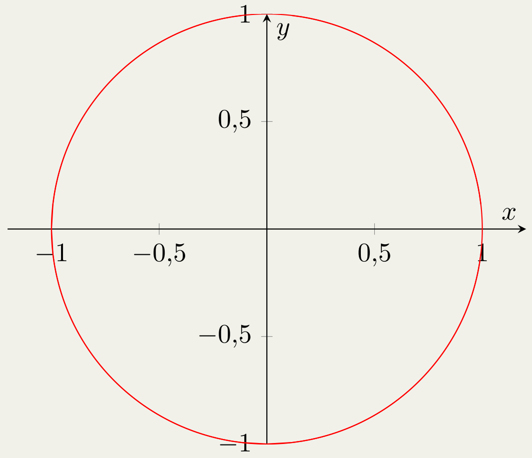


Ejemplo 4.3.5

La sección cónica dada por $x^2 + y^2 = 0$ es degenerada pues puede reescribirse como $(x+iy)(x-iy)$. Notemos que en $\mathbb{R}^2$ tan solo describe el punto $(0,0)$.

Ejemplo 4.3.6

Para $\alpha \neq 0$, la ecuación $x^2 + y^2 = \alpha$ no es degenerada, pues no puede reducirse a un producto de polinomios complejos lineales. Notemos que en $\mathbb{R}^2$, para $\alpha > 0$ la ecuación anterior describe un círculo y para $\alpha < 0$ el conjunto vacío.



$x^2 + y^2 = 1$

Proposición 4.3.7

La cónica descrita por la matriz M es degenerada si y solamente si $\det(M) = 0$.

Daremos solo una demostración esquemática de la proposición anterior. Una demostración rigurosa puede ser encontrada en [Las57].

Demostración. Denotemos por $\vec{x}$ el vector $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. Supongamos que $\det(M) = 0$. Por el teorema del eje central, existe una matriz unitaria $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que la forma cuadrática $f(\vec{x}) = \vec{x}^T M \vec{x}$ puede reescribirse como $f(\vec{x}) = w^T D w$ con $w = U\vec{x}$ y donde D es la matriz de los valores propios de M. Como $\det(M) = 0$, sin pérdida de generalidad (permutando las filas y columnas) podemos asumir que $D_{3,3} = 0$ y escribir

$$f(x) = \lambda_1 w_1^2 + \lambda_2 w_2^2 = (\sqrt{\lambda_1} w_1 + i\sqrt{\lambda_2} w_2)(\sqrt{\lambda_1} w_1 - i\sqrt{\lambda_2} w_2).$$

Deshaciendo el cambio de variables $w = Ux$ obtenemos que f se factoriza como dos formas lineales sobre $\mathbb{C}$.

Por otro lado, si la cónica descrita por M es degenerada, entonces la podemos describir mediante la ecuación $0 = (ax + by + c)(dx + ey + f)$ para valores $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{C}$. Desarrollando la expresión anterior, obtenemos que la forma matricial puede escribirse de la forma

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ad & \frac{ae+bd}{2} & \frac{af+cd}{2} \\ \frac{ae+bd}{2} & be & \frac{bf+ce}{2} \\ \frac{af+cd}{2} & \frac{bf+ce}{2} & cf \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

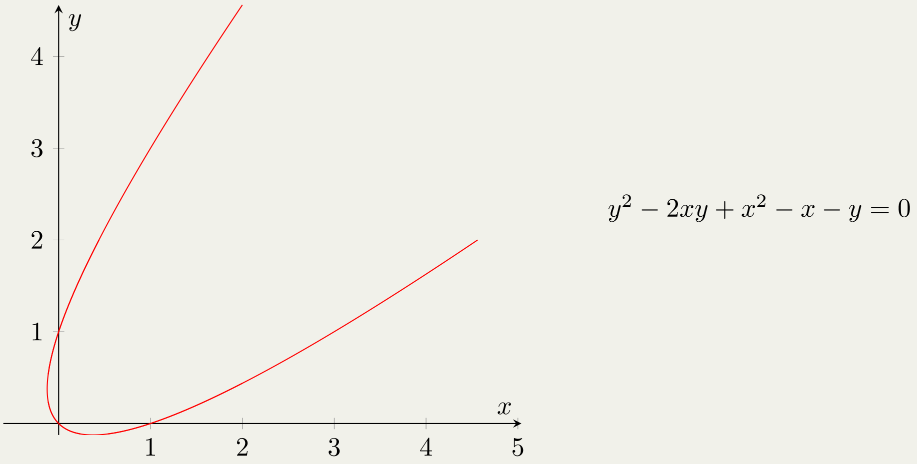
Un horrible cálculo muestra que el determinante de la matriz que describe la forma cuadrática anterior es 0. $\square$

En el caso en que una cónica no sea degenerada podemos clasificar su forma de acuerdo al determinante de la matriz Q según el criterio siguiente:

1. Si $\det(Q) = 0$ la cónica es una parábola.

Ejemplo 4.3.8

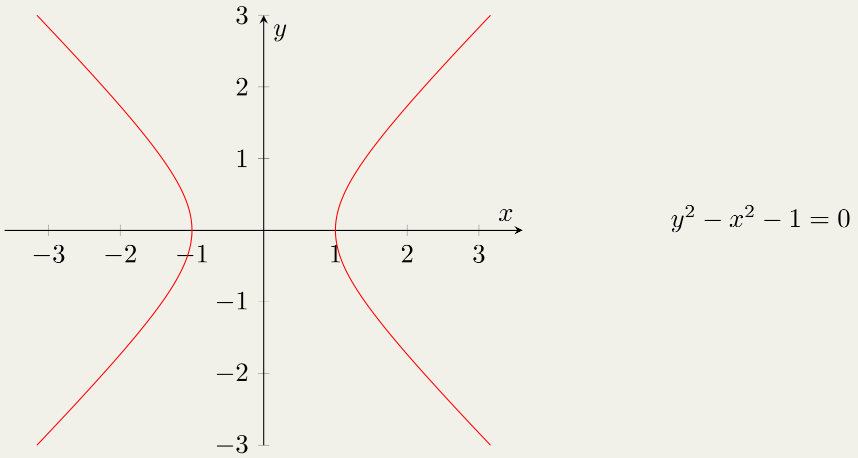
La cónica $y^2 - 2xy + x^2 - x - y = 0$ cumple que $\det(Q) = 0$ y representa una parábola.



2. Si $\det(Q) < 0$ la cónica es una hipérbola.

Ejemplo 4.3.9

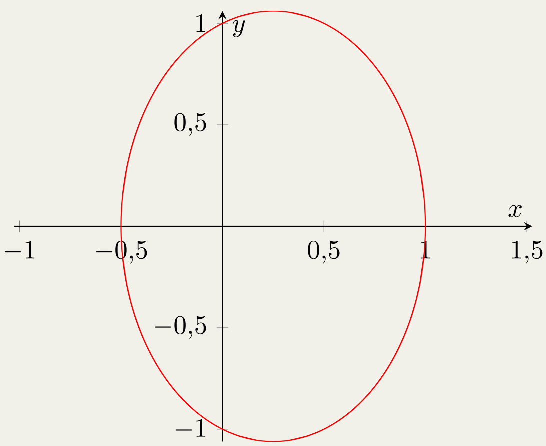
La cónica $y^2 - x^2 - 1 = 0$ cumple que $\det(Q) < 0$ y representa una hipérbola.



3. Si $\det(Q) > 0$ la cónica es una elipse.

Ejemplo 4.3.10

La cónica $y^2 + 2x^2 - x - 1 = 0$ cumple que $\det(Q) > 0$ y representa una elipse.



$$y^2 + 2x^2 - x - 1 = 0$$

Observación 4.7. Cuando ambos valores propios de una cónica no degenerada Q son idénticos y no nulos, la ecuación describe una circunferencia.

Observación 4.8. En el caso de una elipse, notamos que es posible que la cónica describa el conjunto vacío (por ejemplo, $2x^2 + y^2 = -1$)

Ejercicio 4.3.11

Determine si las siguientes cónicas son degeneradas. Si alguna de ellas no lo es, determine si es una parábola, una hipérbola o una elipse.

1. $y^2 - 2xy + x^2 - x + y = 0$.
2. $y^2 - 2xy + x^2 - x - y = 0$.
3. $y^2 + x^2 - x + y = 0$.
4. $y^2 - x^2 - x + y = 0$.
5. $x + y = 0$.
6. $2xy + x + y - 1 = 0$.

Capítulo 5

Álgebra lineal numérica

En la vida moderna, prácticamente nadie va por la calle multiplicando matrices ni resolviendo ecuaciones lineales. Para ello tenemos computadores que hacen eso de manera mucho más rápida que nosotros y con una probabiidad extremadamente baja de realizar errores. Es por lo mismo que es de vital importancia comprender que tan complejo es para un computador realizar una operación con matrices, y cuanto tiempo tardará en realizarlo.

Para ello necesitamos primero entender como almacena un computador números. Hay muchas formas de hacerlo, dos de las más comunes son las siguientes:

Ejemplo 5.0.1: Enteros con signo

`int`: un entero de k bits (con signo). Un número entero se representa mediante una cadena de k valores en $\mathtt{0}, \mathtt{1}$ y puede representar números enteros entre -2^k a $2^k - 1$.
Explicitamente, si definimos $c_i = 2^i$ para $0 \leq i < k-1$ y $c_{k-1} = -2^{k-1}$ la representación de un entero usando bits $b_{k-1}b_{k-2} \dots b_1 b_0 \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^k$ está dada por:

$$\mathtt{int}(b_{k-1}b_{k-2} \dots b_1 b_0) = \sum_{i=0}^{k-1} b_i c_i.$$

Usualmente k toma valores que son potencias de 2, por ejemplo, enteros de 8 bits, 16 bits, 32 bits, etc.

Ejercicio 5.0.2

Determine que número entero de 8 bits representan las siguientes cadenas de caracteres.

1. `00000000`,
2. `00000001`,
3. `00001010`,
4. `10000000`,
5. `11111111`,
6. `11111110`,
7. `10101010`.

Ejemplo 5.0.3: Reales con signo de 32 bits

`double`: un número “real” (en la práctica es un número racional) se representa mediante una cadena de 32 valores

$$b_{31} \dots b_1 b_0 \in \{\mathtt{0}, \mathtt{1}\}^3 2$$

El bit b_{31} representa el signo, los bits $b_{30} \dots b_{23}$ representan el exponente y los siguientes bits representan un entero en binario.

Más precisamente, el número representado por una cadena de bits es

$$\texttt{double}(b_{31}\dots b_1 b_0) = \underbrace{(-1)^{b_{31}}}_{\text{signo}}\underbrace{2^{\left(\sum_{k=23}^{31} b_k 2^{k-23}\right)-127}}_{\text{exponente}}\underbrace{\left(1+\sum_{i=1}^{23} b_{23-i}2^{-i}\right)}_{\text{fracción}}.$$

Obviamente, no basta con saber representar números en un computador, sino como se hacen operaciones entre ellos (suma, resta, multiplicación, etc.) Los detalles de ésto no los veremos en este curso. Sin embargo, queremos guiar nuestro estudio del álgebra lineal numérica por el principio siguiente:

En un computador, la multiplicación toma mucho más tiempo que la suma.

Observación 5.1. El principio anterior no es cierto en todas las implementaciones, por ejemplo, en Python la diferencia no es tan alta en enteros de precisión arbitraria (porque la suma está implementada de manera muy lenta para evitar problemas de overflow). Pero por ejemplo en C++ o Java la suma de enteros es mucho más rápida que la multiplicación.

En particular, trabajando con matrices, nos gustaría minimizar el número de multiplicaciones que realizamos. También nos gustaría evitar trabajar con fracciones muy pequeñas o números muy grandes (recordemos que los números que almacenamos deben estar en rangos de acuerdo a la representación de ellos).

Consideremos la multiplicación de dos matrices cuadradas A, B de tamaño n. Una pregunta básica es cuantas operaciones de suma y multipliación se necesitan para obtener $C = AB$. Recordemos que para todo $1 \leq i, j \leq n$, tenemos que

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}B_{k,j}.$$

Entonces para calcular $C_{i,j}$ necesitamos n sumas y n multiplicaciones. Como existen n^2 pares $1 \leq i, j \leq n$, la forma obvia de multiplicar matrices requiere n^3 sumas y n^3 multiplicaciones.

Ejemplo 5.0.4

Si A y B son dos matrices cuadradas de tamaño $n = 10^5$, se requerirán $2 \cdot 10^{15}$ operaciones (la mitad multiplicaciones y la mitad sumas) para calcular $C = AB$.
En Python, un buen computador personal de la fecha requiere aproximadamente de 1s para realizar 10^6 multiplicaciones. Luego para calcular el producto de dos matrices de tamaño $n = 10^5$ se requiere de 10^9 segundos, es decir, aproximadamente 31,7 años, tan solo para calcular las multiplicaciones.

El rol del álgebra lineal numérica es encontrar maneras más eficientes de realizar esos cálculos. Uno pordría preguntarse: ¿Será posible calcular la multiplicación de dos matrices cuadradas de tamaño n usando **menos** de n^3 operaciones? Afortunadamente la respuesta es sí. Una manera de hacerlo es mediante el **algoritmo de Strassen**.

Ejemplo 5.0.5: Algoritmo de Strassen

Sean A, B matrices cuadradas de tamaño n. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $n = 2^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$ (si no es el caso, rellenamos las matrices con ceros). Luego podemos dividir

A en cuatro matrices $\mathbf{A}_{1,1}$, $\mathbf{A}_{1,2}$, $\mathbf{A}_{2,1}$ y $\mathbf{A}_{2,2}$ cuadradas de tamaño 2^{k-1}, lo mismo con B.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ \hline \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{array}\right). \quad B = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{1,1} & \mathbf{B}_{1,2} \\ \hline \mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{B}_{2,2} \end{array}\right).$$

Luego

$$C = AB = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{1,1}\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,2}\mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{A}_{1,1}\mathbf{B}_{2,1} + \mathbf{A}_{1,2}\mathbf{B}_{2,2} \\ \hline \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{A}_{2,2}\mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{B}_{2,1} + \mathbf{A}_{2,2}\mathbf{B}_{2,2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_{1,1} & \mathbf{C}_{1,2} \\ \hline \mathbf{C}_{2,1} & \mathbf{C}_{2,2} \end{array}\right).$$

A priori esto no sirve de nada. Calcular la multiplicación de un un producto de submatrices requiere $(2^{k-1})^3$ multiplicaciones, entonces calcular AB usando esta descomposición toma $8 * (2^{k-1})^3 = (2^k)^3$ multiplicaciones. Sin embargo Strassen [Str69] descubrió la siguiente fórmula maravillosa. Definamos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_1 &= (\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{2,2})(\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{B}_{2,2}) \\
\mathbf{M}_2 &= (\mathbf{A}_{2,1} + \mathbf{A}_{2,2})\mathbf{B}_{1,1} \\
\mathbf{M}_3 &= \mathbf{A}_{1,1}(\mathbf{B}_{1,2} - \mathbf{B}_{2,2}) \\
\mathbf{M}_4 &= \mathbf{A}_{2,2}(\mathbf{B}_{2,1} - \mathbf{B}_{1,1}) \\
\mathbf{M}_5 &= (\mathbf{A}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,2})\mathbf{B}_{2,2} \\
\mathbf{M}_6 &= (\mathbf{A}_{2,1} - \mathbf{A}_{1,1})(\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{B}_{1,2}) \\
\mathbf{M}_7 &= (\mathbf{A}_{1,2} - \mathbf{A}_{2,2})(\mathbf{B}_{2,1} + \mathbf{B}_{2,2}).
\end{aligned}$$

Notemos que para calcular $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_7$ tan solo se requieren 7 multiplicaciones de matrices. Además se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_{1,1} &= \mathbf{A}_{1,1}\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{A}_{1,2}\mathbf{B}_{2,1} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_4 - \mathbf{M}_5 + \mathbf{M}_7 \\
\mathbf{C}_{1,2} &= \mathbf{A}_{1,1}\mathbf{B}_{2,1} + \mathbf{A}_{1,2}\mathbf{B}_{2,2} = \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_5 \\
\mathbf{C}_{2,1} &= \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{B}_{1,1} + \mathbf{A}_{2,2}\mathbf{B}_{2,1} = \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_4 \\
\mathbf{C}_{2,2} &= \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{B}_{2,1} + \mathbf{A}_{2,2}\mathbf{B}_{2,2} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_6
\end{aligned}$$

En otras palabras, se puede calcular el producto de dos matrices de tamaño 2^k usando 7 veces el número de multiplicaciones que toma multiplicar dos matrices de tamaño 2^{k-1}. Es fácil demostrar inductivamente que usando este algoritmo e puede calcular el producto de dos matrices de tamaño 2^k usando 7^k multiplicaciones. Es decir, si usamos $n = 2^k$, entonces se requiere

$$n^{\log_2(7)} \approx n^{2,807} \text{ multiplicaciones.}$$

La diferencia es importante para valores grandes de n. Por ejemplo, si tomamos $n = 10^5$ como en el ejemplo anterior, se requerirá aproximadamente $10^{14,008}$ multiplicaciones en vez de 10^{15}. En términos de tiempo, si 10^6 operaciones tomasen $1s$ esto significaría aproximadamente 3,17 años en vez de 31,7.

Observación 5.2. En la práctica, el algoritmo de Strassen no es eficiente para matrices de tamaños pequeños, ya que si bien reduce el número de multiplicaciones, aumenta considerablemente el número de sumas y restas.

Observación 5.3. Existen algoritmos mucho más eficientes que Strassen para la multiplicación de matrices. El record actual lo tiene el algoritmo de Josh Alman y Virginia Vassilevska Williams [AW20] que toma (asintóticamente) $n^{2,3728596}$ multiplicaciones para calcular el resultado de la multiplicación de dos matrices cuadradas de tamaño n. El anterior record lo tenía Le Gall [Gal14], con un algoritmo que requiere asintóticamente $n^{2,3728597}$ multiplicaciones.

5.1. Algoritmo de Gauss y pivoteo parcial

Consideremos el sistema de ecuaciones representado por la ecuación matricial[1]

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es sencillo verificar que la única solución del sistema es $x_1 = x_2 = 1$. Ahora supongamos que añadimos un poco de ruido a la ecuación, por ejemplo, si tomamos un número pequeño ε (por ejemplo, $\varepsilon = 10^{-5}$) y consideramos

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Podemos usar el método de eliminación de Gauss para encontrar la solución (si $\varepsilon \neq 1$):

$$\left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & 1-\frac{1}{\varepsilon} & 2-\frac{1}{\varepsilon} \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & \varepsilon-1 & 2\varepsilon-1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 0 & 1-\frac{2\varepsilon-1}{\varepsilon-1} \\ 0 & \varepsilon-1 & 2\varepsilon-1 \end{array}\right],$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 0 & 1-\frac{2\varepsilon-1}{\varepsilon-1} \\ 0 & \varepsilon-1 & 2\varepsilon-1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 0 & \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \\ 0 & \varepsilon-1 & 2\varepsilon-1 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{1-\varepsilon} \\ 0 & 1 & 2-\frac{1}{1-\varepsilon} \end{array}\right].$$

Entonces la única solución de la ecuación (para $\varepsilon \neq 1$) está dada por

$$x_1 = \frac{1}{1-\varepsilon}, \quad x_2 = 2 - \frac{1}{1-\varepsilon}$$

Lo cual hace mucho sentido, es una solución cercana a la anterior para valores pequeños de ε.

Ahora supongamos que intentamos resolver la última ecuación en un computador usando numeros reales con punto flotante con poca precisión. Recordemos que, de manera abstracta, estos números se representan mediante un bit de signo, un exponente y una fracción. Es decir, un número de la forma

$$\pm(1.b_1b_2b_3\dots b_t) \times \beta^n.$$

Donde n es el exponente de beta $\beta \in \mathbb{N}$, y $b_1, \dots, b_t$ son números enteros entre 0 y $\beta - 1$ y el número t se denomina la precisión.

Ejemplo 5.1.1

Supongamos que estamos usando números en base $\beta = 10$, con precisión $t = 3$ y donde el exponente n puede tomar valores $-8 \leq n \leq 8$. Ejemplos de números que podemos representar son

1. $1 = 1{,}000 \times 10^0$.
2. $1345 = 1{,}345 \times 10^3$.
3. $-1000 = -1{,}000 \times 10^3$.
4. $0{,}00001 = 1{,}000 \times 10^{-5}$.

Si un número (o el resultado de una operación entre dos números) no se puede representar de manera exacta usando punto flotante, el computador asignará el número más cercano.

[1]Esta sección está basada fundamentalmente en el texto http://www.math.iitb.ac.in/~neela/partialpivot.pdf

Ahora repliquemos los pasos de eliminación de Gauss usando $\varepsilon = 10^{-5}$ y un computador. El primer paso da

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0{,}00001 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} 0{,}00001 & 1 & 1 \\ 0 & 1-\frac{1}{0{,}00001} & 2-\frac{1}{0{,}00001} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0{,}00001 & 1 & 1 \\ 0 & -99999 & -99998 \end{array}\right].$$

Ahora, 10^{-5} puede representarse sin problemas si tomamos $\beta = 10$, $t = 3$ y $-8 \leq n \leq 8$. Pero -99999 y -99998 no pueden representarse de manera exacta y se aproximarán a -10^5. Luego el computador se "confundiría" y en el último paso representaría la matriz del modo siguiente:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1{,}000 \times 10^{-5} & 1{,}000 \times 10^{0} & 1{,}000 \times 10^{0} \\ 1{,}000 \times 10^{-8} & -1{,}000 \times 10^{5} & -1{,}000 \times 10^{5} \end{array}\right].$$

De la última ecuación el computador obtendría que $x_2 = 1$. Al substituír en la primera ecuación saldría que $x_1 = 0$. Notemos que esta solución está completamente errada!

La razón del error anterior, es que el computador realiza errores al realizar álgebra aproximada, y como vimos, puede tener efectos enormes en el resultado. El método del pivoteo parcial es una heurística que ayuda a reducir este tipo de errores. La idea es que es bueno evitar números muy pequeños, ya que al dividir por ellos es muy probable encontrar errores de aproximación.

Por ejemplo, si en el ejemplo anterior comenzamos por intercambiar las filas, el método de eliminación de Gauss da el resultado siguiente

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0{,}00001 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0{,}00001 & 1 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-0{,}00001 & 2-0{,}00001 \end{array}\right].$$

En este caso el computador también se "equivoca", y representa la última matriz del modo siguiente:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1{,}000 \times 10^{0} & 1{,}000 \times 10^{0} & 1{,}000 \times 10^{0} \\ 1{,}000 \times 10^{-8} & 1{,}000 \times 10^{0} & 1{,}000 \times 10^{0} \end{array}\right].$$

Si embargo ahora el resultado del computador es el correcto $x_1 = x_2 = 1{,}000 \times 10^0 = 1$. En general, es mejor evitar la división por números muy pequeños. Esta es la heurística del pivoteo parcial.

Definición 5.1.2: Pivoteo parcial

El método del pivoteo parcial es una modificación al método de eliminación de Gauss donde al momento de pivotear, en vez de elegir cualquier coeficiente no nulo, se elige siempre el que tenga el mayor valor absoluto (si hay más de uno, se elige el de la fila de menor índice).

Ejemplo 5.1.3

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Luego los pasos del método de Gauss con pivoteo parcial son los siguientes.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & -6 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right] \underset{f_1 \leftrightarrow f_2}{\mapsto} \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 7 & 2 & 9 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \end{array}\right]$$

$$\mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \mapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

De donde obtenemos la solución, $x_1 = x_2 = 1$ y $x_3 = 2$.

Ejercicio 5.1.4

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones usando el método de eliminación de Gauss con pivoteo parcial

$$\begin{pmatrix} 0{,}02 & 0{,}01 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 100 & 200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}02 \\ 1 \\ 4 \\ 800 \end{pmatrix}.$$

5.2. Descomposición LU y LDU

Ahora consideraremos un tipo de descomposición de matrices que facilita mucho la resolución numérica de ecuaciones lineales.

Definición 5.2.1: Descomposición LU

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada. Decimos que A admite una descomposición LU si existe una matriz triangular inferior $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y una matriz triangular superior $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tales que

$$A = LU.$$

Ejemplo 5.2.2

Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se puede verificar que A admite una descomposición LU:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}_{U}.$$

Notemos que no toda matriz admite una descomposición LU, como muestra el siguiente ejemplo

Ejemplo 5.2.3

Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que A es una matriz invertible. Por otro lado, si $A = LU$ para matrices de la forma:

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \ell_{1,1} & 0 \\ \ell_{2,1} & \ell_{2,2} \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} \\ 0 & u_{2,2} \end{pmatrix}}_{U}.$$

Entonces $\ell_{1,1}u_{1,1} = 0$, luego $\ell_{1,1} = 0$ o $u_{1,1} = 0$, lo cual implica que $\det(L) = 0$ o $\det(U) = 0$, lo cual es imposible ya que $\det(LU) = \det(A) = -1$.

El ejemplo anterior muestra que no siempre es posible encontrar una descomposición LU. Sin embargo, siempre es posible encontrar una descomposición de la forma LU modulo una matriz de permutación de filas P

Definición 5.2.4: Descomposición LU con pivoteo parcial

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada. Decimos que A admite una descomposición LU con pivoteo parcial si existe una matriz de permutación de filas P, una matriz triangular inferior $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y una matriz triangular superior $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tales que

$$PA = LU.$$

Ejemplo 5.2.5

Considere la matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego A admite una descomposición LU con pivoteo parcial,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}.$$

Antes de estudiar la existencia de las descomposiciones, mencionemos que son muy útiles para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Observación 5.4. Si tenemos que A admite una descomposición LU (con pivoteo parcial), entonces la ecuación $Ax = b$ puede reescribirse como

$$LUx = Pb.$$

Definiendo $\widetilde{b} = Pb$ y $\widetilde{x} = Ux$ podemos resolver

$$L\widetilde{x} = \widetilde{b},$$

mediante substitución inversa, luego de encontrar una solución podemos resolver

$$Ux = \widetilde{x},$$

y con eso tendremos una solución al sistema de ecuaciones inicial.

Si ya contamos con la descomposición LU, el algoritmo anterior tiene dos ventajas:

1. No es necesario pivotear las filas o columnas, sino que solo substituír valores y despejar.
2. El mismo procedimiento se puede aplicar a diferentes valores de b. Y da una solución de manera rápida.

Observación 5.5. Una segunda aplicación es calcular el determinante de A. Tenemos que si $PA = LU$, entonces

$$\det(A) = \det(P^{-1})\det(L)\det(U) = (-1)^M \prod_{i=1}^{n} \ell_{i,i} \prod_{i=1}^{n} u_{i,i}$$

Donde M es el número de permutaciones de filas efectuadas por P.

Observación 5.6. Una tercera aplicación es calcular la inversa de A (si $\det(A) \neq 0$). Si tenemos que $A = LU$ y declaramos que b_i es la columna i-ésima de A^{-1}, entonces podemos usar el algoritmo de la primera observación para resolver

$$Ab_i = LUb_i = e_i.$$

Donde e_i es el vector canónico en la componente i-ésima. Luego A^{-1} se calcula juntando los vectores columna b_i.

En lo que sigue, mostraremos que toda matriz cuadrada A invertible admite una descomposición LU con pivoteo parcial y daremos un algoritmo para obtenerla. El algoritmo es esencialmente el método de eliminación de Gauss con pivoteo parcial, donde además guardamos un poco más de información.

Observación 5.7. En general, toda matriz cuadrada A admite una descomposición LU con pivoteo parcial. Una prueba de esto puede encontrarse en el artículo [OJ05].

Teorema 5.2.6: Existencia de descomposición LU con pivoteo parcial

Sea $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ una matriz cuadrada invertible. Entonces A admite una descomposición LU con pivoteo parcial.

Demostración. Consideremos el algoritmo siguiente. Definiremos matrices $A^{(i)}$ para $0 \leq i \leq n$ del modo siguiente. Definamos $A^{(0)} = A$ y supongamos que ya tenemos $A^{(i)}$ con la propiedad de que todos los coeficientes $a_{k,j}^{(i)}$ de $A^{(i)}$ donde $j < i$ y $k > j$ son 0. Supongamos que el coeficiente $a_{i,i}^{(i)}$ de $A^{(i)}$ es no nulo. Entonces definimos para $k > i$

$$\ell_{k,i} = -\frac{a_{k,i}^{(i)}}{a_{i,i}^{(i)}}.$$

Consideremos la matriz $L^{(i)}$ dada por una diagonal de 1, y los coeficientes $\ell_{k,i}$ para todo $k > i$. Es decir,

$$L^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \ell_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \ell_{i+2,i} & & \ddots & \\ & & \vdots & & & \ddots & \\ & & \ell_{n,i} & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz $A^{(i+1)} = L^{(i)}A^{(i)}$ cumple la misma propiedad de la matriz $A^{(i)}$, es decir, para todo $j < i+1$ y $k > j$ tenemos que $a_{k,j}^{(i+1)} = 0$.

De esta manera, tenemos que $A^{(n)}$ es triangular superior. Notemos que

$$A^{(n)} = L^{(n-1)}L^{(n-2)} \cdots L^{(1)}L^{(0)}A$$

Notemos que cada $L^{(i)}$ es una matriz triangular inferior, luego $(L^{(i)})^{-1}$ es también triangular inferior. Tenemos entonces que

$$A = \underbrace{(L^{(0)})^{-1}(L^{(1)})^{-1} \cdots (L^{(n-2)})^{-1}(L^{(n-1)})^{-1}}_{L} \underbrace{A^{(n)}}_{U}.$$

Lo cual entrega la descomposición buscada.

Notemos que supusimos que $a_{i,i}^{(i)} \neq 0$ en cada etapa. Esto en general no es cierto. Sin embargo, si A es invertible, entonces siempre existe $j \geq i$ tal que $a_{j,i}^{(i)} \neq 0$. Usando una matriz que permute la fila i y j, se puede redefinir $A' = PA$ y aplicar el algoritmo a la matriz A'. Haciendo este proceso tantas veces como sea necesario es claro que se terminará por obtener una descomposición de la forma $PA = LU$. $\square$

Observación 5.8. En la práctica, no es buena idea calcular la secuencia de matrices $L^{(i)}$. Lo mejor es utilizar el algoritmo de eliminación de Gauss para pivotear la matriz hasta obtener una matriz triangular superior U, y luego resolver las ecuaciones mediante substitución para encontrar la matriz L.

Ejercicio 5.2.7

Aplique el algoritmo anterior para obtener la descomposición LU (con pivoteo parcial) de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}.$$

5.3. Descomposición de Cholesky

Anteriormente vimos que toda matriz cuadrada invertible A admite una descomposición LU con pivoteo parcial. Es decir, que existe una matriz de permutación de filas P, una matriz triangular inferior L y una matriz triangular superior U tales que

$$PA = LU.$$

Hoy veremos que en el caso de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ Hermítica (o simétrica si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) definida positiva se puede obtener una descomposición mucho mejor. Recordemos que una matriz Hermítica es definida positiva, si todos sus valores propios son positivos.

Definición 5.3.1: Descomposición de Cholesky

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Una **descomposición de Cholesky** de A es una matriz triangular inferior $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cuya diagonal tiene entradas positivas reales tal que

$$A = LL^*.$$

Donde $L^* = \overline{(L^T)}$ denota la matriz adjunta de L.

Observación 5.9. Notemos que si L es triangular inferior, entonces L^* es triangular superior. Luego la descomposición de Cholesky es un caso especial de la descomposición LU.

La descomposición de Cholesky es numéricamente mucho más estable que la descomposición LU. En la práctica, reduce casi a la mitad el tiempo de resolución de un sistema de ecuaciones lineales con respecto a una descomposición LU. También tiene aplicaciones en optimización (minimizar expresiones con segunda derivada mediante minimos cuadrados) y en el método de simulación de Monte Carlo.

Teorema 5.3.2: Existencia de la descomposición de Cholesky

Toda matriz hermítica definida positiva admite una descomposción de Cholesky.

No daremos una prueba completamente formal de Teorema 5.3.2. Las personas interesadas en ella pueden encontrarla en la sección 4 de [Gol96]. Sin embargo, daremos un esquema de la prueba en forma de un algoritmo para calcular la descomposición de Cholesky.

Éste algoritmo funcionará por el hecho de que toda matriz definida positiva $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cumple la propiedad de que toda submatriz de una matriz inducida por un subconjunto de índices $I \subset \{1, \dots, n\}$ (es decir, la matriz obtenida al restringirse a las filas y columnas de I) es semidefinida positiva.

Esquema de demostración del Teorema 5.3.2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ una matriz Hermítica definida positiva. Vamos a definir una secuencia finita de matrices $A^{(1)}, \dots, A^{(n+1)}$ donde $A^{(1)} = A$. Supongamos que tenemos la matriz $A^{(i)}$ con la estructura siguiente:

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{i-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a & \mathbf{b}_i^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}_i & \mathbf{B}^{(i)} \end{pmatrix}$$

Donde la fila y columna central indican la fila y columna i respectivamente, I_{i-1} es la identidad de tamaño $i-1$, $B^{(i)}$ es una matriz Hermítica de tamaño $n-i$ y $a \neq 0$.

Usando las entradas de $A^{(i)}$ podemos definir

$$A^{(i+1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}^{(i)} - \frac{1}{a}\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i^* \end{pmatrix}.$$

Notemos que $\mathbf{B}^{(i)} - \frac{1}{a}\mathbf{b}_i\mathbf{b}_i^*$ es Hermítica si $\mathbf{B}^{(\mathbf{i})}$ lo es, luego $A^{(i+1)}$ es de la misma forma que $A^{(i)}$. Notemos además que $A^{(n+1)} = I_n$.

Si tenemos $A^{(i)}$ de la forma anterior, podemos definir

$$L^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{i-1} & 0 & \mathbf{0} \\ 0 & \sqrt{a} & 0 \\ \mathbf{0} & \frac{1}{\sqrt{a}}\mathbf{b}_i & \mathbf{I}_{n-1} \end{pmatrix}$$

Y se cumple la ecuación $A^{(i)} = L^{(i)}A^{(i+1)}(L^{(i)})^*$.

De éste modo, obtenemos que

$$\begin{aligned} A = A^{(1)} &= L^{(1)}L^{(2)}\cdots L^{(n)}A^{(n+1)}(L^{(n)})^*\cdots(L^{(2)})^*(L^{(1)})^* \\ &= \underbrace{L^{(1)}L^{(2)}\cdots L^{(n)}}_{L}\underbrace{(L^{(n)})^*\cdots(L^{(2)})^*(L^{(1)})^*}_{L^*}. \end{aligned}$$

Lo cual muestra que A admite una descomposición de Cholesky. □

Observación 5.10. Los detalles que escondimos debajo de la alfombra en la prueba anterior, es la demostración de que $a \neq 0$ en cada etapa de la iteración. Para ello, basta demostrar que la matriz $\mathbf{B}^{(i)}$ es siempre definida positiva en toda etapa de la iteración.

Ejercicio 5.3.3

Calcule la descomposición de Cholesky de la matriz simétrica definida positiva

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{pmatrix}.$$

5.4. Normas matriciales subordinadas

Recordemos brevemente la noción de norma en un espacio vectorial

Definición 5.4.1: Norma

Sea E un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$. Una norma es una función $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$ que cumple las propiedades sjguientes:

1. $\|x\| = 0$ si y solamente si $x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x \in E$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$.

Obviamente, siempre podemos interpretar el espacio de matrices $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ como un espacio vectorial asbtracto de dimensión n^2 sobre $\mathbb{K}$ y otorgarle una norma del mismo modo al que estamos habituados, por ejemplo, la norma euclidiana

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A_{i,j})^2}.$$

o la norma del máximo

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i,j\leq n} |A_{i,j}|.$$

Observación 5.11. En el contexto de matrices, a la norma $\|A\|_2$ se le denomina **norma de Frobenius** o norma de **Hilbert-Schmidt**.

Sin embargo, acá nos interesaremos en normas que preserven un poco más de estructura de las matrices. El espacio de matrices también admite un producto, y nos gustaría que la norma también se comporte bien con respecto al producto. Esto motiva la definición siguiente.

Definición 5.4.2: Norma matricial

Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Una norma sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se denomina **norma matricial** si adicionalmente cumple que

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \text{ para todas las matrices} A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Observación 5.12. Dependiendo de la literatura, el término norma matricial puede usarse de la manera anterior, o simplemente para denotar cualquier norma en una matriz. En esos casos, a las normas matriciales tal como las definimos nosotros las denominan **normas submultiplicativas**.

Ejercicio 5.4.3

Muestre que la norma del máximo no es una norma matricial (no es submultiplicativa), pero que la norma de Frobenius sí lo es.

Ejercicio 5.4.4

Muestre que si I es la identidad de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces para toda norma matricial en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se tiene que

$$\|I\| \geq 1.$$

En lo que sigue, estudiaremos un tipo de norma matricial especial que permite relacionar la norma de un operador con los elementos del espacio donde actúa.

Definición 5.4.5: Norma matricial subordinada

Sea $E = \mathbb{K}^n$ un espacio vectorial, y sea $\|\cdot\|$ una norma sobre E. Definimos la **norma matricial subordinada** a $\|\cdot\|$ sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ mediante

$$\|A\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Notemos que estamos usando la misma notación para la norma subordinada $\|A\|$ para matrices y para la norma en el espacio vectorial. No habrá riesgo de confusión ya que se aplican sobre objetos distintos.

Observación 5.13. En la definición anterior, si E es un espacio vectorial cualquiera y reemplazamos $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ por el espacio de operadores "continuos" $T\colon E \to E$, entonces la norma matricial subordinada a aquella norma en E se denomina usualmente **norma fuerte de operadores**. Como aquí tan solo trabajaremos en dimensión finita, podemos siempre pensarla como una norma sobre un espacio de matrices.

Observación 5.14. Una utilidad de las normas subordinadas es que permiten aplicar normas a ecuaciones que involucran matrices y vectores. Por ejemplo, si tenemos $Ax = b$, entonces podemos escribir

$$\|b\| = \|Ax\| \leq \|A\|\|x\|.$$

Notemos que la desigualdad es válida incluso si $x = 0$.

Ejercicio 5.4.6

Muestre que para toda norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{K}^n$, la norma matricial subordinada en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es una norma matricial (es norma y es submultiplicativa).

Las normas subordinadas son fundamentales para estudiar espacios de operadores sobre espacios vectoriales de dimensión infinita. Sin embargo, nosotros estudiaremos una aplicación en dimensión finita que permite cuantificar la estabilidad de un sistema de ecuaciones lineales.

Ejercicio 5.4.7

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, definamos $\rho(A)$ como el máximo del valor absoluto de todos sus valores propios

$$\rho(A) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i|.$$

Este valor se denomina **radio espectral** de A. Muestre que si $\|\cdot\|$ es una norma matricial subordinada, entonces

$$\rho(A) \leq \sqrt[k]{\|A\|^k} \text{ para todo entero } k \geq 1.$$

Ejercicio 5.4.8

Muestre que si $\|\cdot\|$ es una norma matricial subordinada, entonces $\|I\| = 1$. Concluya que la norma de Frobenius para un espacio de dimensión $d \geq 2$ no es subordinada a ninguna norma.

5.5. Estabilidad de sistemas lineales

Consideremos el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

Se puede verificar que la única solución a éste sistema es $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$, que la matriz es simétrica y su determinante es 1[2].

Supongamos que perturbamos el lado derecho de la ecuación con un valor pequeño en cada coordenada $(-0{,}1 \leq \varepsilon \leq 0{,}1)$. Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32{,}1 \\ 22{,}9 \\ 33{,}1 \\ 30{,}9 \end{pmatrix}.$$

Ahora las soluciones del sistema son $y = (9{,}2, -12{,}6, 4{,}5, -1{,}1)$. Es decir, un error pequeño en el vector de la derecha lleva a un error enorme en las soluciones del sistema.

Del mismo modo, si ahora perturbamos la matriz con un error pequeño $(-0{,}5 \leq \varepsilon \leq 0{,}5)$, por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8{,}1 & 7{,}2 \\ 7{,}08 & 5{,}04 & 6 & 5 \\ 8 & 5{,}98 & 9{,}98 & 9 \\ 6{,}99 & 4{,}99 & 9 & 9{,}98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

Entonces las soluciones son $z = (-81, 137, -34, 22)$. Del mismo modo, un error muy pequeño en las entradas de la matriz lleva a una solución muy distinta de la original.

A continuación estudiaremos una manera de cuantificar este error, el número de condicionamiento de una matriz.

[2]Este ejemplo fue sacado del dcumento https://www.cis.upenn.edu/~cis515/cis515-11-sl4.pdf

Definición 5.5.1: Número de condicionamiento de una matriz

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz invertible y sea $\|\cdot\|$ una norma matricial subordinada en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Definimos el número de condicionamiento de A como el valor

$$\mathrm{Cond}(A) = \|A\|\|A^{-1}\|.$$

Fijemos una norma en el espacio que induce una norma subordinada. Para motivar esta definición, supongamos que tenemos el sistema $Ax = b$ y perturbamos el lado derecho para obtener $b + \Delta b$. Si escribimos las nuevas soluciones como $y = x + \Delta x$ tenemos que

$$A(x + \Delta x) = b + \Delta b$$

Cancelando las soluciones originales, tenemos que $A\Delta x = \Delta b$, por lo cual obtenemos que

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\|\|\Delta b\|.$$

Por otro lado, siempre tenemos que $\|b\| \leq \|A\|\|x\|$. Juntando estas dos desigualdades obtenemos que

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq (\|A\|\|A\|^{-1})\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \mathrm{Cond}(A)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Luego el error relativo en la solución, está acotado por el número de condicionamiento por el error relativo en el lado derecho.

De manera similar, si consideramos un error en las entradas de la matriz ΔA, tenemos que

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b.$$

De un modo similar al anterior, puede mostrarse que

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \approx \frac{\|\Delta x\|}{\|x + \Delta x\|} \leq \mathrm{Cond}(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Observación 5.15. Puede demostrarse que las cotas anteriores son rígidas, en el sentido de que existen valores de b y Δb (o A y ΔA) para los cuales la desigualdad es una igualdad.

Ejercicio 5.5.2

Muestre que para toda matriz invertible en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y toda norma subordinada se tiene que

1. $\mathrm{Cond}(A) \geq 1$,
2. $\mathrm{Cond}(A) = \mathrm{Cond}(A^{-1})$,
3. $\mathrm{Cond}(\lambda A) = \mathrm{Cond}(A)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ejercicio 5.5.3

Muestre que si tomamos la norma euclidiana en $\mathbb{C}^n$ y consideramos la norma subordinada $\|\cdot\|_2$ en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, entonces para toda matriz normal invertible $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tenemos que

$$\mathrm{Cond}(A) = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}.$$

Donde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los valores propios de A de modo tal que $|\lambda_1| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$.

Ejemplo 5.5.4

En el ejemplo del inicio, con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

Si consideramos la norma subordinada a la norma euclidiana, tenemos que

$$\text{Cond}(A) \approx 2984.$$

Al igual que en el ejemplo anterior, si tomamos

$$b = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}, \quad \Delta b = \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ -0{,}1 \\ 0{,}1 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Y las respectivas soluciones $x, x + \Delta x$ de los sistemas $Ax = b$ y $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ respectivamente, tenemos que

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta x = \begin{pmatrix} 8{,}2 \\ -13{,}6 \\ 3{,}5, \\ -2{,}1 \end{pmatrix},$$

Luego

$$\|b\|_2 \approx 60{,}025, \quad \|x\|_2 = 2, \quad \|\Delta b\| = 0{,}2, \quad \|\Delta x\| \approx 16, 397.$$

Y obtenemos que

$$8{,}199 \approx \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{Cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \approx 9{,}943.$$

Vemos que en este caso el número de condicionamiento permite predecir de buena manera el error estimado en la solución.

Bibliografía

[AW20] Josh Alman and Virginia Vassilevska Williams. A refined laser method and faster matrix multiplication. *arXiv:2010.05846*, 2020.

[Gal14] François Le Gall. Powers of tensors and fast matrix multiplication. In *Proceedings of the 39th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation - ISSAC '14*. ACM Press, 2014.

[Gol96] Gene Golub. *Matrix computations*. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1996.

[Gre75] Werner Greub. *Linear Algebra*. Springer New York, 1975.

[HJ17] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, New York, NY, second edition, corrected reprint edition, 2017.

[HK71] K. Hoffman and R.A. Kunze. *Linear Algebra*. Featured Titles for Linear Algebra (Advanced) Series. Prentice-Hall, 1971.

[Lan87] Serge Lang. *Linear Algebra*. Springer New York, 1987.

[Las57] J. W. Lasley. On degenerate conics. *The American Mathematical Monthly*, 64(5):362–364, 1957.

[Lay16] David Lay. *Linear algebra and its applications*. Pearson, Boston, 2016.

[OJ05] Pavel Okunev and Charles R. Johnson. Necessary and sufficient conditions for existence of the LU factorization of an arbitrary matrix, 2005.

[Str69] Volker Strassen. Gaussian elimination is not optimal. *Numerische Mathematik*, 13(4):354–356, August 1969.