Universidad de Santiago de Chile
Facultad de Ciencia
Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación

Grupos de automorfismos y G-subshifts.

Por
Paola Andrea Rivera Burgos

Profesores Guía:
Dr. Sebastián Barbieri L.(USACH)
Dr. Cristóbal Rivas E.(U de Chile)

Tesis presentada al Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación de la Facultad de Ciencia de la Universidad de Santiago de Chile, para optar al grado de Doctor en Ciencia con Mención Matemática.

Santiago - Chile
Abril, 2025

On ne voit bien qu'avec le cœur.
L'essentiel est invisible pour les yeux.

Antoine Saint-Exupéry.

Agradecimientos

Como diría la gran Violeta Parra: *¡Gracias a la vida que me ha dado tanto, me ha dado la risa y me ha dado el llanto!*

Y vaya que esta vida me ha dado de todo en estos cinco años. ¡Qué montaña rusa! Viví una pandemia lejos de mi familia, viajé a países que ni en sueños pensé conocer, vi mi nombre en un artículo junto a dos matemáticos que admiro muchísimo, le pedí un autógrafo a un matemático famoso (sí, lo hice), y lo más importante: conocí personas increíbles que me enseñaron demasiado.

Primero, gracias infinitas a mis directores Sebastián Barbieri y Cristóbal Rivas. Gracias por la oportunidad de llegar hasta acá, por todas las reuniones, por la paciencia (que fue MUCHA), por los consejos y la compañía. Sin su guía, esta historia no se habría contado. Aprendí un montón sobre cómo ser un matemático, espero algún día parecerme un poquito a ustedes.

Al jurado: gracias por estar aquí para cerrar esta etapa. Gracias. De corazón, gracias.

Al Mathamsud dynamical Group theory, ANID y a la Universidad Santiago de Chile, particularmente al programa, al departamento y a la Vicerrectoría de Postgrado: gracias por todo el apoyo y por cobijarme como un segundo hogar.

También agradezco a todos mis compañeros de las oficinas expropiadas, sobre todo a los que se convirtieron en mis buenos amigos: Jorge, Nica, Leo y Óscar. Gracias por los cafecitos, las galletas y el chismecito que evitaba colapsos. Gracias por reírse y por hacer espacio para la amistad entre tantas demostraciones y definiciones. Fue un verdadero regalo tenerlos cerca.

Mi bolas dankon a mia koro: Dankon pro la dolĉeco kaj la ĉokoladoj. Dankon pro esti kun mi dum la malfacilaj tagoj, pro via akademia helpo kaj pro fari min senti sufiĉa. Dankon pro via pacienco, pro via rideto en miaj momentoj de streso, kaj pro la maniero kiel vi kredas je mi eĉ kiam mi mem dubas. Mi amas vin.

A mi familia, mi mami María Helena, mi papi Orlando, mis hermanos Ferchito y Linita, mis abuelitas Sofía y Alicia y mi tía Tulia: gracias por las oraciones (¡espero que funcionen!), gracias por el apoyo incondicional, gracias por las barras y por estar siempre que sentí que no era capaz. Ninguna palabra alcanza para agradecerles por ser mi raíz, mi fuerza y mi refugio. Quiero hacer un agradecimiento especial a mi sobrino Levi, él todavía no lo sabe, pero cuando aprenda a leer va a descubrir que fue mi motivación más grande para seguir, aunque estuviera muerta de miedo. A Fitzgerald, la sangre no nos une, pero el tiempo y el cariño construyeron un lazo igual de fuerte. Gracias por ser parte de este proceso, por todo el tiempo compartido, el apoyo, las conversaciones y las aventuras.

Cierro estos agradecimientos con el corazón lleno. Este trabajo es tan mío como de todos los que me acompañaron. Finalmente, quiero agradecerme a mí, por no rendirme. A veces, lo más difícil es creer en uno mismo, y por eso me agradezco con todo mi ser.

Paola Andrea Rivera Burgos
Abril, 2025

Tabla de Contenidos

Introducción

El estudio del grupo de automorfismos de un G-subshift, homeomorfismos biyectivos que conmutan con la acción del shift, tiene su origen en el trabajo clásico de Hedlund de los años 60 (véase [16]). En este artículo, Hedlund caracteriza los automorfismos de $\mathbb{Z}$-full shifts con alfabetos finitos, como autómatas celulares con dependencia local finita. De lo anterior, se deduce que dicho grupo es contable y, además, preserva propiedades dinámicas como la periodicidad. Empleando un refinamiento de la técnica de "marcadores" introducida por Krieger en 1982, [23] (véase también [4]); Boyle, Lind y Rudolph, en [5], extendieron los resultados de Hedlund de $\mathbb{Z}$-full shifts a $\mathbb{Z}$-subshifts de tipo finito (topológicamente) mezcladores. Más precisamente, demostraron que el grupo de automorfismos de un $\mathbb{Z}$-subshift de tipo finito mezclador es un grupo residualmente finito y algebraicamente "grande", en el sentido de que contiene copias de una amplia variedad de grupos: la suma directa contable de copias de $\mathbb{Z}$, la suma directa de cada colección contable de grupos finitos y grupos libres en k generadores con $k \geq 2$.

A pesar de estos avances, el entendimiento general de la estructura algebraica de los grupos de automorfismos sobre G-subshifts continúa siendo una tarea difícil, especialmente fuera de los casos clásicos. Un problema central en este ámbito es la clasificación de los grupos de automorfismos de G-subshifts, en general si se consideran distintos alfabetos o grupos distintos de $\mathbb{Z}$. Una herramienta clave en esta dirección es el Teorema de Ryan, véase [29], quien demostró que el centro del grupo de automorfismos de un $\mathbb{Z}$-full shift está generado por potencias del shift. Este teorema ha sido fundamental para distinguir grupos de automorfismos de $\mathbb{Z}$-full shifts. Por ejemplo, en [5, Section 4] se mostró que $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}) \not\cong \mathrm{Aut}(\{0,1,2,3\}^{\mathbb{Z}})$, y más generalmente, en [15, Theorem 2.5], $\mathrm{Aut}(\{0,1,\cdots,p\}^{\mathbb{Z}}) \not\cong \mathrm{Aut}(\{0,1,\cdots,p^k\}^{\mathbb{Z}})$ para todo número primo p y entero $k \geq 2$. En [19, Theorem 3.2], Kim y Roush demostraron que el grupo de automorfismos de un $\mathbb{Z}$-full shift se incrusta en el grupo de automorfismos de cualquier $\mathbb{Z}$-subshift de tipo finito mezclador no trivial. Dado que los $\mathbb{Z}$-full shifts son, en particular, $\mathbb{Z}$-subshifts de tipo finito mezcladores, podemos concluir que todos los grupos de automorfismos de $\mathbb{Z}$-full shift se contienen entre sí. A pesar de esto, aún se desconoce, por ejemplo, si $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$ y $\mathrm{Aut}(\{0,1,2\}^{\mathbb{Z}})$ son o no isomorfos. El resultado de Kim y Roush fue pionero en usar la técnica de la "cinta transportadora". Generalizaciones de esta técnica son una de nuestras principales herramientas para los resultados de este trabajo.

El grupo de automorfismos para un $\mathbb{Z}^d$-subshift con $d \geq 2$ ha sido menos estudiado y se conoce mucho menos que en el caso unidimensional, $d = 1$. La mayoría de la investigación en esta dirección se ha enfocado en extender algunos de los resultados conocidos para $\mathbb{Z}$-subshifts, ya sea adaptando

técnicas existentes o trabajando con hipótesis más débiles. Una de las herramientas más utilizadas para estudiar el grupo de automorfismos de $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 1$, es la técnica de marcadores. Usando esta técnica, Ward mostró en [35] que el grupo de automorfismos de un $\mathbb{Z}^d$-subshift de tipo finito mezclador contiene copias de todos los grupos finitos. Más adelante, Hochman, en [18], generalizó este resultado y el Teorema de Ryan para $\mathbb{Z}^d$-subshifts de tipo finito con entropía positiva. También demostró que si un $\mathbb{Z}^d$-subshift tiene órbitas periódicas densas, entonces el grupo de automorfismos de cualquier $\mathbb{Z}$-full shift se puede incrustar en él. Finalmente, Hochman construyó un ejemplo de un $\mathbb{Z}^2$-subshift de tipo finito mezclador cuyo grupo de automorfismos es la suma directa entre $\mathbb{Z}^2$ y un grupo G localmente finito. Esto implica que no se puede generalizar el resultado de Kim y Roush para $\mathbb{Z}^d$-subshifts con $d \geq 2$, pues no podemos incrustar el grupo de automorfismos de $\mathbb{Z}^d$-full shifts (que contiene al grupo libre en dos generadores) en el grupo de automorfismos del subshift de tipo finito mezclador del ejemplo. Sin embargo, existen versiones de este resultado cuando se consideran G-subshifts fuertemente irreducibles, véase, por ejemplo, Teorema D y Teorema E.

Además de los resultados obtenidos para $\mathbb{Z}^d$-full shifts y $\mathbb{Z}^d$-subshifts de tipo finito mezclador, con $d \geq 1$, una línea de investigación complementaria se ha centrado en el estudio de subshifts que presentan propiedades adicionales. Por ejemplo, shifts sóficos (véase [21, 37]), subshifts con restricciones de crecimiento (véase [8, 9, 22]), así como el análisis de características que determinan restricciones para la incrustación en el grupo de automorfismos de $\mathbb{Z}$-subshifts (véase [8, 10, 13, 30, 37]). También se han estudiado otros grupos que guardan relación con el grupo de automorfismos de $\mathbb{Z}$-subshifts. Por ejemplo, Hartman, Kra y Schmieding estudiaron en [15] el grupo de automorfismos estabilizado de $\mathbb{Z}$-subshifts de tipo finito mezcladores. A diferencia de los grupos de automorfismos de $\mathbb{Z}$-full shifts, los grupos de automorfismos estabilizados de $\mathbb{Z}$-full shifts se pueden distinguir basados únicamente en el tamaño del alfabeto.

El propósito de este trabajo es contribuir al entendimiento de los grupos de automorfismos mediante la extensión de los resultados obtenidos por Ryan, Kim y Roush estudiando diferentes clases de G-subshifts, con G un grupo infinito. Por un lado, consideramos la clase de G-subshifts fuertemente irreducibles, lo que nos permite ir más allá del contexto tradicional de $\mathbb{Z}^d$, con $d \geq 1$. Por otro lado, reemplazamos la clase de G-subshifts de tipo finito por una clase más general: G-subshifts con la propiedad topológica de Markov fuerte.

A continuación mencionamos los resultados más importantes de este trabajo.

Primero, estudiamos una generalización del Lema de Marcadores, una herramienta fundamental que permite manejar la estructura de un G-subshift mediante particiones convenientes. Esta técnica fue introducida por Krieger en [23, Lemma 2] en el contexto de cadenas de Markov y ha sido aplicada en diversos problemas relacionados con incrustaciones. Más recientemente, McGoff y Pavlov demostraron en [26] la existencia de marcadores para G-subshifts sobre grupos contables infinitos. Extendemos estos resultados al contexto de G-subshifts fuertemente irreducibles en grupos infinitos. Dado G un grupo infinito y X un G-subshift. Denotamos por $\mathrm{Fix}(X)$ al núcleo del homomorfismo asociado a la acción del grupo shift, es decir, $\mathrm{Fix}(X) = \{g \in G \colon gx = x \text{ para todo } x \in X\}$. Decimos que X es marcable, si para todo conjunto finito $Y \subset G$ existe un conjunto finito $W \subset G$ y

un (Y, W)-marcador, donde un (Y, W)-marcador es un patrón p en el lenguaje de X con soporte $W \setminus Y$ que no se solapa por traslaciones de $g \in WY^{-1} \setminus \mathrm{Fix}(X)$. Una observación importante es que no existe un criterio unificado para la técnica de marcadores; de hecho, nuestra interpretación es muy distinta a la de McGoff y Pavlov, y se acerca más a la definición adoptada por Hochman. El primer resultado principal de esta tesis se resume en el siguiente teorema:

Teorema A. *Cada G-subshift fuertemente irreducible en un grupo infinito G es marcable. Más aún, si el grupo es finitamente generado y dotado con una métrica de la palabra, entonces el G-subshift admite $(B(r), B(37r))$-marcadores para todo r suficientemente grande.*

Asegurando la existencia de marcadores, podemos definir los marcadores tipo huevo. Colecciones de patrones que son construidos alrededor de un marcador común, pero llevan consigo información que puede ser intercambiada. Estos marcadores nos permiten construir automorfismos en un G-subshift fuertemente irreducible. Con la ayuda de los marcadores tipo huevo buscamos generalizar el Teorema de Ryan, pues es una herramienta útil en el problema de clasificación de grupos de automorfismos. Sea G un grupo infinito, denotamos por $Z(G)$ el centro del grupo, es decir, $Z(G) = \{g \in G \colon gh = hg \text{ para todo } h \in G\}$. Notemos que el subgrupo $\mathrm{Fix}(X) \leqslant G$, definido anteriormente, es el núcleo del homomorfismo asociado a la acción de grupo. De esta manera, el Teorema de Ryan, para el caso de un G-subshift fuertemente irreducible, es el siguiente:

Teorema B. *Sea G un grupo infinito y X un G-subshift no vacío fuertemente irreducible. Entonces $Z(\mathrm{Aut}(X))$ es generado por shifts por elementos $g \in G$ con $g\,\mathrm{Fix}(X) \in Z(G/\mathrm{Fix}(X))$. En particular*

$$Z(\mathrm{Aut}(X)) \cong Z\left({}^{G}\!/_{\mathrm{Fix}(X)}\right).$$

Notemos que si la acción del shift en X es fiel, es decir, $\mathrm{Fix}(X) = \{\mathbf{1}_G\}$, la conclusión del Teorema B puede leerse simplemente como $Z(\mathrm{Aut}(X)) \cong Z(G)$. De lo anterior, podemos deducir que si G y H son grupos con centros no isomorfos, entonces los grupos de automorfismos de G-full shifts y H-full shifts también son no isomorfos. Esta observación nos permite responder negativamente a la pregunta de Hochman hecha en [17]: Si $n \neq m$, ¿$\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}^n})$ es isomorfo a $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}^m})$?

La aplicación más famosa del Teorema de Ryan es la existencia de grupos de automorfismos de $\mathbb{Z}$-full shifts que no son isomorfos. De esta manera, usamos el Teorema B para obtener una generalización de esta aplicación para una clase de grupos infinitos.

Teorema C. *Sea G un grupo infinito y supongamos que existe un epimorfismo $\psi \colon G \to \mathbb{Z}$ tal que $\psi(Z(G)) = \mathbb{Z}$. Para cada entero $n \geq 2$ y enteros positivos k, ℓ tenemos que*

$$\mathrm{Aut}(\{1, \ldots, n^k\}^G) \cong \mathrm{Aut}(\{1, \ldots, n^\ell\}^G) \text{ si y sólo si } k = \ell.$$

La hipótesis sobre el $Z(G)$ se debe a que el Teorema C usa la clasificación de entropías topológicas de $\mathbb{Z}$-subshifts de tipo finito mezcladores hecha por Lind en [25]. Esta hipótesis es satisfecha por cualquier grupo de la forma $G = H \times \mathbb{Z}$ para cualquier grupo H.

Recordemos que el Teorema de Kim y Roush garantiza la incrustación del grupo de automorfismos de $\mathbb{Z}$-full shifts, en grupos de automorfismos de $\mathbb{Z}$-subshifts de tipo finito mezcladores. En este

trabajo, presentamos dos generalizaciones de este resultado (Teorema D y Teorema E). Sin embargo, ninguno de estos resultados generaliza el trabajo de Hochman: en [18], se muestra que el grupo de automorfismos de un $\mathbb{Z}$-full shift se incrusta en el grupo de automorfismos de un $\mathbb{Z}^d$-subshift de tipo finito con entropía positiva y con conjunto de órbitas periódicas denso en el $\mathbb{Z}^d$-subshift. La clase de G-subshifts con entropía positiva y puntos periódicos densos no es comparable con la clase de G-subshifts fuertemente irreducibles.

Para la demostración del Teorema D, presentamos un resultado preliminar que nos permite incrustar el grupo de automorfismos de $A^{\mathbb{Z}}$, para $|A| \geq 2$, en el grupo de automorfismos de B^G, con G un grupo finitamente generado infinito y B un alfabeto suficientemente grande. Con este caso identificamos los elementos esenciales de la técnica de la cinta transportadora en su forma más básica para posteriormente usarlo en la prueba del siguiente teorema.

Teorema D. *Sea G un grupo y X un G-subshift fuertemente irreducible no trivial. Para cada alfabeto finito A:*

(1) Si G admite un elemento libre de torsión, entonces $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ se incrusta en $\mathrm{Aut}(X)$.

(2) Si F_2 se incrusta en G, entonces $\mathrm{Aut}(A^{F_k})$ se incrusta en $\mathrm{Aut}(X)$ para cada $k \geq 1$.

Finalmente, para el Teorema E debemos tener en cuenta que la clase de los grupos no promediables no es una subclase de la clase de grupos que contienen una copia de F_2 como subgrupo. El grupo de Lodha-Moore, véase [38] o los grupos Monstruo de Tarski, véase [27], son ejemplos de grupos no promediables y que no contienen una copia de F_2 como subgrupo. El último resultado principal de esta tesis queda enunciado como sigue:

Teorema E. *Sea G un grupo y X un G-subshift fuertemente irreducible no trivial que satisface la propiedad topológica de Markov fuerte. Para cada alfabeto finito A:*

(1) Si G es no localmente finito, entonces $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ se incrusta en $\mathrm{Aut}(X)$.

(2) Si G es no promediable, entonces $\mathrm{Aut}(A^{F_k})$ se incrusta en $\mathrm{Aut}(X)$ para cada $k \geq 1$.

La condición de ser no localmente finito es también necesaria para la incrustación de $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ en $\mathrm{Aut}(X)$. De hecho, si G es localmente finito, Raymond mostró en [28, Theorem 1] que el grupo de automorfismos de un G-subshift de tipo finito, es localmente finito. Para el enunciado (2) del teorema, no sabemos si la condición de no promediabilidad es necesaria para la incrustación de $\mathrm{Aut}(A^{F_k})$ en $\mathrm{Aut}(X)$. En esta dirección, Salo demostró en [33] que $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{F_k})$ no se incrusta en $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$.

Este trabajo se estructura en cuatro capítulos. El Capítulo 1 está dedicado a presentar las nociones preliminares necesarias, con especial énfasis en la teoría de G-subshifts para grupos infinitos y sus grupos de automorfismos. El Teorema A es demostrado en el Capítulo 2. Recordemos que este teorema es una generalización del Lema de Marcadores, herramienta clave para los resultados

posteriores. Para la demostración del Teorema de Ryan generalizado (Teorema B), usamos una consecuencia del Teorema A, existencia de marcadores tipo huevo. Esta prueba es el objetivo principal del Capítulo 3, junto con la demostración del Teorema C. Finalmente, en el Capítulo 4, usamos los marcadores tipo huevo para dar una prueba del Teorema D y el Teorema E. Al final de cada capítulo, escribimos preguntas que quedaron abiertas durante la realización del trabajo, junto con perspectivas que pueden ser útiles para la resolución de las mismas.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo describimos los conceptos clave, fijamos la notación de estos, demostramos algunas de sus propiedades y presentamos algunos de sus resultados más importantes.

Sea G un grupo dotado con la topología discreta y con elemento identidad $\mathbf{1}_G$. Usaremos $F \Subset G$, para notar que F es subconjunto finito de G y $\langle F \rangle$ para el subgrupo de G generado por F. Dado $g \in G$ y $F, K \subset G$ escribimos $gF = \{gh : h \in F\}$, $FK = \{fk : f \in F, k \in K\}$ y $F^{-1} = \{g : g^{-1} \in F\}$, decimos que F es simétrico si $F = F^{-1}$.

Dados G y H grupos, escribimos $G \cong H$ para indicar que son isomorfos. El centro de G es el subgrupo normal $Z(G) = \{g \in G : gh = hg \text{ para todo } h \in G\}$. Para un subgrupo $H \leqslant G$, denotamos sus clases laterales izquierdas en G por G/H. Para un conjunto A, denotamos por $\mathrm{Sym}(A)$ su grupo de permutaciones.

Sea $S \subset G$ un conjunto de generadores simétrico de un grupo G, si el grupo es finitamente generado, el conjunto S es finito. Dado $g \in G$, denotamos por $|g|_S$ la longitud de la palabra de g con respecto al conjunto generador S y notamos $d_S(g, h) = |g^{-1}h|_S$ la métrica de la palabra asociada. Es decir, $|g|_S$ es la longitud de la palabra más corta en S^* que representa a g. Cuando no haya riesgo de confusión, omitimos el subíndice y escribimos $|g|$ y $d(g, h)$. Para $r \in \mathbb{N}$, escribimos $B(r) = \{g \in G : |g| \leq r\}$ para la bola de radio r.

1.1 Espacios del shift

Sea A un conjunto finito y G un grupo con elemento identidad $\mathbf{1}_G$ dotado de la topología discreta, la topología donde todos los subconjuntos de G son abiertos. Consideremos el conjunto $A^G = \{x \colon G \to A\}$ de todas las funciones de G a A, el cual llamamos **espacio de configuraciones**, al conjunto A lo llamamos **alfabeto**, los elementos $a \in A$ se llaman **símbolos** y los elementos $x \in A^G$ se llaman **configuraciones**.

Definimos el **G-full shift** como el conjunto A^G dotado con la topología prodiscreta (la topología producto donde cada coordenada lleva la topología discreta) y con la acción del **shift** (izquierdo) $G \curvearrowright A^G$ dada por

$$(gx)(h) = x(g^{-1}h) \qquad \text{para todo } g, h \in G \text{ y } x \in A^G.$$

Notamos que efectivamente es una acción izquierda: $g_1(g_2x)(h) = g_2x(g_1^{-1}h) = x(g_2^{-1}g_1^{-1}h) = x((g_1g_2)^{-1}h) = (g_1g_2)x(h)$.

Sea $F \Subset G$ un subconjunto finito de G. Definimos un **patrón** con soporte F como un elemento $p \in A^F$. Denotamos el cilindro generado por p, $[p] = \{x \in A^G : x|_F = p\}$ y notamos que los cilindros forman una base clopen para la topología prodiscreta en A^G, la cual es compacta por Tychonoff y Hausdorff por ser producto de topologías Hausdorff. Decimos que un patrón p **aparece** en x (en la posición $g \in G$) si $g^{-1}x \in [p]$.

Definición 1.1.1. Un conjunto $X \subset A^G$ se llama un G**-subshift** si es cerrado en la topología prodiscreta e invariante bajo la acción del shift.

Equivalentemente, X es un G-subshift si y solo si existe un conjunto de patrones prohibidos $\mathcal{F}$ tal que:

$$X = X_{\mathcal{F}} = \{x \in A^G : gx \notin [p] \text{ para todo } g \in G, p \in \mathcal{F}\}.$$

Proposición 1.1.2. *X es un G-subshift si y sólo si existe un conjunto (posiblemente infinito) de patrones prohibidos $\mathcal{F}$ tal que $X = X_{\mathcal{F}} = \{x \in A^G : gx \notin [p]$ para todo $g \in G, p \in \mathcal{F}\}$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Es sencillo ver que $X_{\mathcal{F}}^c$ es abierto y $X_{\mathcal{F}}$ es shift-invariante por definición.
($\Rightarrow$) Dado que $X \subset A^G$ es un subconjunto cerrado y teniendo en cuenta que todo abierto es la unión de intersecciones finitas de cilindros, podemos escribir $X = A^G \setminus \cup_{j\in J}(\cap_{i=1}^{N_j}[p_i])$, es decir, X se puede ver como el complemento de una unión de cilindros. Dado que X es shift-invariante, tenemos que quitar además las traslaciones por g de todos los patrones que no pertenecen a X, es decir, $X = A^G \setminus \cup_{j\in J} \cap_{i=1}^{N_j} [gp]_i$, para todo $g \in G$, lo que podemos traducir como $x \in X$ si no tiene uniones de cilindros de la forma $q_j = \cap_{i=1}^{N_j}[p_i]$ ni ninguno de sus trasladados, es decir, $gx \notin [q]$ para todo $g \in G$. □

Nota 1.1.3. Diremos que un G-subshift es **no trivial** si no es ni vacío ni reducido a un solo punto. Cuando el contexto sea claro, omitiremos la referencia a G y hablaremos simplemente de un subshift.

Sean M, N subconjuntos de G, y sean $p \in A^M$, $q \in A^N$. Escribimos $p \sqsubset q$ siempre que $M \subset N$ y $q|_M = p$. Si p y q son iguales cuando se restringen a $M \cap N$, denotamos por $p \vee q$ su **concatenación**, es decir, el elemento en $A^{M\cup N}$ definido por las condiciones $p \sqsubset (p \vee q)$ y $q \sqsubset (p \vee q)$.

Dado $F \Subset G$, y X un G-subshift denotamos por $\mathrm{L}_F(X)$ el conjunto de todos los patrones $p \in A^F$ para los cuales existe $x \in X$ tal que p aparece en x. El **lenguaje** de X es el conjunto dado por

$$\mathrm{L}(X) = \bigcup_{F\Subset G} \mathrm{L}_F(X).$$

Este objeto es de suma importancia, lo usaremos a lo largo del documento, pues nos permite encontrar equivalencias entre subshifts, es decir, dos subshifts coinciden si y solo si sus lenguajes coinciden.

Proposición 1.1.4. *Dos G-subshifts, X_1 y X_2, son iguales si y sólo si sus lenguajes son iguales, es decir, $X_1 = X_2 \iff \mathrm{L}(X_1) = \mathrm{L}(X_2)$*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $p \in \mathrm{L}(X_1)$, luego existe $x \in X_1$ tal que p aparece en x. Dado que $X_1 = X_2$, $x \in X_2$ lo que implica $p \in \mathrm{L}(x_2)$, la otra contención es análoga.
($\Leftarrow$) Sabemos que por definición de lenguaje que $\mathrm{L}(X_1)^c$ contiene todos los patrones prohibidos de X_1 y por la Proposición 1.1.2 tenemos que $X_1 = X_{\mathrm{L}(X_1)^c}$. Esto implica que para todo $x \in X_1$ y $p \in \mathrm{L}(X_1)^c$, $gx \notin [p]$, para todo $g \in G$. Dado que $\mathrm{L}(X_1) = \mathrm{L}(X_2)$ tenemos que $\mathrm{L}(X_1)^c = \mathrm{L}(X_2)^c$, de esta manera, para todo $p \in \mathrm{L}(X_2)^c$, $gx \notin [p]$ para todo $g \in G$. Luego, $x \in X_{\mathrm{L}(X_2)^c}$, es decir, $x \in X_2$ la otra contención es análoga. □

Dado un subshift $X \subset A^G$, denotamos por $\mathrm{Fix}(X) = \{g \in G : gx = x \text{ para todo } x \in A^G\}$, al núcleo de la acción del shift, es decir, el subgrupo normal de todos los elementos en G que fijan cada $x \in X$. Así, la acción de shift $G \curvearrowright X$ es fiel cuando $\mathrm{Fix}(X) = \{1_G\}$.

1.2 Tipos de subshifts

Existen diferentes tipos de subshifts, usualmente clasificados por sus propiedades dinámicas o combinatorias. Algunos de los más comunes y con los que trabajaremos de ahora en adelante son: subshifts de tipo finito (SFTs) los cuales están determinados por un conjunto finito de patrones prohibidos; subshifts fuertemente irreducibles (SI) que imponen condiciones que aseguran una fuerte conexión entre las configuraciones y shifts que verifican la propiedad topológica de Markov fuerte (TMP fuerte). Esta clase generaliza los SFT, los cuales piden que la admisibilidad de palabras finitas dependa solamente de restricciones locales, en tanto que los subshifts con TMP fuerte no necesariamente requieren ser definidos por un conjunto finito de palabras prohibidas.

1.2.1 Subshift de tipo finito

Una clase fundamental y clásica de subshift es la de los subshifts de tipo finito o SFT's por sus siglas en inglés. Estos subshifts se obtienen restringiendo el conjunto de patrones prohibidos a un conjunto finito. El estudio de estos subshifts surgió a mediados del siglo XX, motivado por problemas en sistemas dinámicos discretos; sin embargo, los SFT's adquirieron un papel central en la teoría de sistemas dinámicos gracias al enfoque introducido por Rufus Bowen y otros investigadores en la década de 1970, quienes estudiaron sus propiedades topológicas y ergódicas.

Definición 1.2.1. Un G-subshift X es de **tipo finito** (SFT) si existe un conjunto finito de patrones prohibidos $\mathcal{F}$ tal que $X = X_{\mathcal{F}}$.

Ejemplo 1.2.2. $X = A^G$ tomando $\mathcal{F} = \varnothing$, es decir, no hay restricciones.

Ejemplo 1.2.3. $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ es el conjunto de todas las configuraciones x tal que no tiene dos 1's consecutivos, es decir, $X = X_{\mathcal{F}}$, donde $\mathcal{F} = \{11\}$. Este shift es llamado **golden mean shift**.

Ejemplo 1.2.4. Sea $G = \mathbb{Z}^2$, sea A el conjunto de baldosas cuadradas de la Figura 1.1:

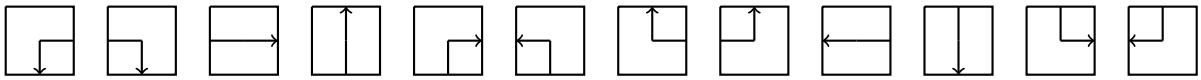


Figura 1.1: Alfabeto de $X_{\text{culebrita}}$.

Definimos $X_{\text{culebrita}} \subset A^{\mathbb{Z}^2}$ como todas las configuraciones x tal que para cada posición $h \in \mathbb{Z}^2$ la flecha saliente de la baldosa coincide con la flecha entrante. De esta manera, el conjunto $\mathcal{F}$ de patrones prohibidos contiene las finitas combinaciones de baldosas donde las flechas no cumplen lo establecido.

1.2.2 La propiedad topológica de Markov fuerte

La propiedad topológica de Markov fuerte (TMP fuerte) fue introducida por Barbieri, Gómez, Marcus y Taati [2], basándose en nociones previas (véase [7]), y también aparece en el trabajo de Gromov [12] bajo el nombre de "splicable space". Esta propiedad se ha generalizado al contexto de acciones continuas de grupos en espacios compactos metrizables [1].

Definición 1.2.5. Un G-subshift X tiene la **propiedad topológica de Markov fuerte** (TMP fuerte) si existe un conjunto finito $M \Subset G$ con la siguiente propiedad: para todo subconjunto finito $F \Subset G$ y para todo $x, y \in X$ tales que $x|_{FM \setminus F} = y|_{FM \setminus F}$, el elemento $x|_F \vee y|_{G \setminus F}$ pertenece a X.

Un conjunto M que verifica lo anterior se denomina **constante de memoria** para X.

Ejemplo 1.2.6. Sea $X \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ un $\mathbb{Z}$ subshift arbitrario y sea Y el subshift resultante de la incrustación de X en $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$, es decir, Y está formado por infinitas copias verticales de X. Afirmamos que este nuevo subshift Y tiene la propiedad topológica de Markov fuerte con $M = \{(0,1)\}$.

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
x = \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & & & \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccccccccccc}
y = \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

Figura 1.2: Configuraciones de Y que coinciden en $FM \setminus F$.

Para el ejemplo particular de la Figura 1.2 tenemos $x, y \in Y$ tales que coinciden en $FM \setminus F$ sombreado de azul, con F bordeado de azul y FM bordeado de rosado. Es claro que, dada la

construcción del subshift, el elemento $x|_F \vee y|_{\mathbb{Z}^2 \setminus F}$ pertenece a Y, pues coincide con la configuración $y \in Y$.

Podemos encontrar más ejemplos de este tipo de subshift en [2].

Cabe señalar que, mientras que para un grupo contable existen solo contables SFT salvo conjugación topológica, la clase de subshifts con TMP fuerte es, en general, no contable [2]. Esto lo podemos intuir fácilmente revisando el Ejemplo 1.2.6 teniendo en cuenta que el subshift X fue escogido arbitrariamente. Además, todo SFT satisface la TMP fuerte.

Proposición 1.2.7. *Si X es SFT entonces X satisface la TMP fuerte.*

Demostración. Sea $X = X_{\mathcal{F}}$, dado que $\mathcal{F}$ es finito, construimos el conjunto $\mathcal{F}_W$ como aquel donde todos los patrones prohibidos tienen el mismo soporte, a saber W, no olvidemos que $X_{\mathcal{F}} = X_{\mathcal{F}_W}$. Con esto en mente, definimos $W \Subset G$ como una ventana que nos permitirá decidir para un patrón $p \in A^W$, si $p \subset \mathcal{F}_W$ o $p \subset \mathrm{L}(X_{\mathcal{F}})$.

Sea $M = W^{-1}W$. Afirmamos que para $F \Subset G$, si $gW \cap F \neq \varnothing$ entonces $gW \subset FM$ para algún $g \in G$, es decir, no tenemos el caso de la Figura 1.3. Si $gW \cap F \neq \varnothing$ entonces existe $w \in W$ y $f \in F$ tal que $gw = f$, luego $g = fw^{-1}$. De esta manera, para $w' \in W$ tenemos que $gw' = fw^{-1}w' \in FW^{-1}W = FM$. Luego $gW \subset FM$.

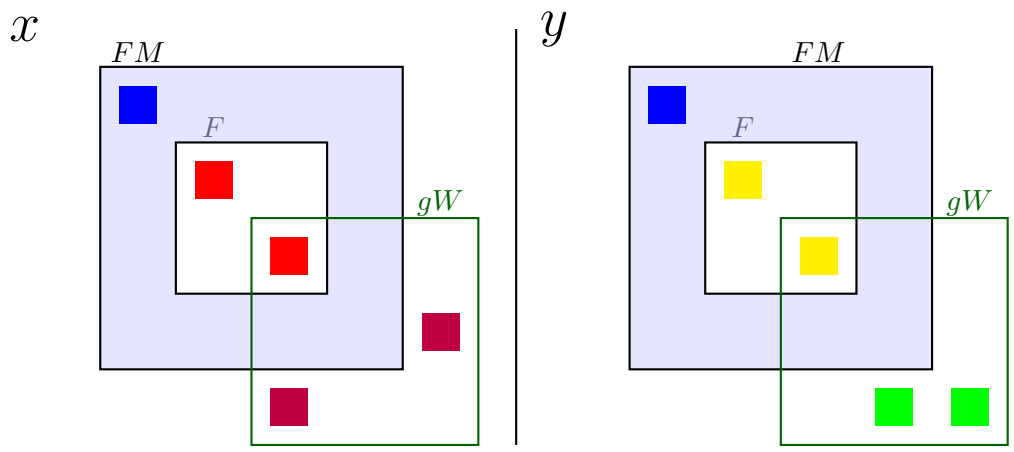


Figura 1.3: Ejemplo de ventana en posición prohibida para $X \subset A^{\mathbb{Z}^2}$, con $A = \{$■, ■, ■, ■, ■, $\}$.

Sea $F \Subset G$ y $x, y \in X$ tales que $x|_{FM \setminus F} = y|_{FM \setminus F}$, verificamos que el elemento $z = x|_F \vee y|_{G \setminus F} \in X$. Para $gW \cap F \neq \varnothing$ la configuración $z|_{gW} = x$, debido a la afirmación anterior y para $gW \cap F = \varnothing$, $z|_{gW} = y$. En cualquier caso, tenemos que $z|_{gW} \in \mathrm{L}(X_{\mathcal{F}})$ para todo $g \in G$. Y así concluimos que $z \in X$.

□

1.2.3 Subshifts fuertemente irreducibles

Los subshifts fuertemente irreducibles generalizan los subshifts de tipo finito. A diferencia de estos, no requieren un conjunto finito de patrones prohibidos, lo que los sitúa en un nivel más general dentro de la jerarquía de los subshifts. Además, en muchos contextos, comparten propiedades dinámicas como la transitividad y la expansividad.

Definición 1.2.8. Un G-subshift X se llama **fuertemente irreducible** si existe un subconjunto finito $K \Subset G$ tal que, si S, T son dos subconjuntos finitos de G con $SK \cap T = \varnothing$, entonces para todo $p \in \mathrm{L}_S(X)$ y para todo $q \in \mathrm{L}_T(X)$ existe una configuración $x \in X$ tal que $x|_S = p$ y $x|_T = q$.

Un conjunto K que cumple lo anterior se denomina **constante de irreducibilidad fuerte** para X.

Ejemplo 1.2.9. El full-shift $X = A^G$ es fuertemente irreducible tomando $K = 1_G$.

Ejemplo 1.2.10. El **golden mean shift** definido en el Ejemplo 1.2.3 necesita 2 espacios de separación entre las configuraciones para poder unirlas sin generar patrones prohibidos. De este modo, es un subshift fuertemente irreducible con $K = \{0, 1\}$.

Ejemplo 1.2.11. Para el **golden mean shift** $X \subset \{0, 1\}^G$ basta con tomar 2 espacios en todas las direcciones posibles de pegado, así X es un subshift fuertemente irreducible con $K = B(1)$.

Observemos que un subshift $X \subset A^G$ es fuertemente irreducible con constante $K \Subset G$ si para todo $S, T \Subset G$ con $SK \cap T = \varnothing$ y para todo $p \in \mathrm{L}_S(X)$ y $q \in \mathrm{L}_T(X)$, la concatenación $p \vee q$ pertenece a $\mathrm{L}_{S \cup T}(X)$.

Afirmamos que si un subshift X es fuertemente irreducible con una constante K que no contiene a $\mathbf{1}_G$, entonces necesariamente X es trivial. Sea $K \not\ni \{1_G\}$, luego $\{\mathbf{1}_G\}K \cap \{\mathbf{1}_G\} = \varnothing$. Sean $p \in \mathrm{L}_{\{1_G\}}$ y $q \in \mathrm{L}_{\{1_G\}}$ tal que $p \in \mathrm{L}_{\{1_G\}} \neq q \in \mathrm{L}_{\{1_G\}}$. De esta manera, para que la configuración $x \in X$ esté bien definida en la identidad, necesariamente $|\mathrm{L}_{\{\mathbf{1}_G\}}(X)| = 1$. Esto implica que todas las configuraciones en X deben ser iguales en cada coordenada, es decir, son configuraciones constantes. De lo anterior deducimos que la constante de irreducibilidad fuerte de un subshift no trivial debe contener la identidad. Esta observación la vamos a usar implícitamente a lo largo del documento.

Nota 1.2.12. Si K es una constante de irreducibilidad fuerte, cualquier conjunto que la contenga también lo es, en particular $K \cup K^{-1}$; lo cual es útil cuando queremos tomar constantes simétricas, i.e., constantes tales que $K = K^{-1}$.

Definición 1.2.13. Sea G un grupo, $K \Subset G$ y $(A_i)_{i \in I}$ una colección de subconjuntos finitos de G. Decimos que $(A_i)_{i \in I}$ es K**-disjunto** si para todo $i \in I$ se tiene

$$A_i K \cap \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} A_j = \varnothing.$$

El siguiente lema es esencial y lo usaremos en varias ocasiones.

Lema 1.2.14. *Sea G un grupo, X un G-subshift fuertemente irreducible con constante K, y sea $(A_i)_{i\in I}$ una colección K -disjunta de subconjuntos de G. Para cualquier colección de patrones $(p_i)_{i\in I}$ con $p_i \in \mathrm{L}_{A_i}(X)$, existe una configuración $x \in X$ tal que $x|_{A_i} = p_i$ para todo $i \in I$.*

Demostración. Aplicando iterativamente la propiedad de fuertemente irreducible se demuestra que para todo $J \subset I$ finito se tiene

$$\bigcap_{j\in J}([p_j] \cap X) \neq \varnothing.$$

Así, la colección $\{[p_i] \cap X : i \in I\}$ de subconjuntos cerrados de X tiene la propiedad de intersección finita y, dado que X es compacto, se concluye que

$$\bigcap_{i\in I}([p_i] \cap X) \neq \varnothing.$$

Cualquier elemento x en dicha intersección cumple la propiedad deseada. □

El siguiente resultado establece que los subshifts fuertemente irreducibles no triviales son "casi fieles" en el sentido de que el subgrupo que fija cada elemento es siempre finito y está contenido en la constante de irreducibilidad.

Proposición 1.2.15. *Sea X un subshift fuertemente irreducible no trivial con constante K. Entonces,* $\mathrm{Fix}(X) \subset K$.

Demostración. Dado que $|X| > 1$, existen dos símbolos distintos $a, b \in A$ que aparecen en X. Sea $g \in G \setminus K$; entonces, $\{\mathbf{1}_G\}K \cap \{g\} = \varnothing$. Por irreducibilidad fuerte, existe una configuración $x \in X$ con $x(\mathbf{1}_G) = a$ y $x(g) = b$, de modo que $gx \neq x$. Esto muestra que $g \notin \mathrm{Fix}(X)$. □

Nota 1.2.16. Sea G un grupo cuyo único subgrupo normal finito es $\{\mathbf{1}_G\}$ (por ejemplo, un grupo sin torsión como $\mathbb{Z}^d$). El lema anterior muestra que la acción del shift es fiel en todo subshift fuertemente irreducible no trivial.

Ejemplo 1.2.17. Existen subshifts fuertemente irreducibles no triviales en los que la acción del shift no es fiel. Por ejemplo, si F es un grupo finito y $G = \mathbb{Z} \times F$, consideramos

$$X = \{x \in \{0,1\}^G : \text{ para todo } t \in F,\ (0,t)x = x\}.$$

Entonces, X es un subshift fuertemente irreducible de G con constante $K = \{0\} \times F$ y se tiene $\mathrm{Fix}(X) = K$.

A continuación se muestra que el lenguaje de un subshift fuertemente irreducible no trivial crece exponencialmente respecto al tamaño de su soporte. Para ello se emplea el siguiente lema elemental.

Lema 1.2.18. *Sea G un grupo, y sean $K, F \Subset G$ conjuntos no vacíos con K simétrico. Existe $U \subset F$ tal que $|U||K| \geq |F|$, y tal que $(\{g\})_{g\in U}$ es K-disjunto.*

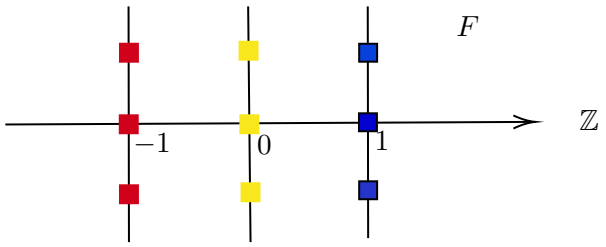


Figura 1.4: Ejemplo de configuración $x \in X$. Tomamos $x \in \{\blacksquare, \blacksquare, \blacksquare\}^{\mathbb{Z}}$ y copiamos la configuración verticalmente la cantidad de veces que indique F.

Demostración. Sea $U \subset F$ un conjunto maximal con la propiedad de que para cada $g \in U$ se cumple que $gK \cap (U \setminus \{g\}) = \varnothing$. Afirmamos que $F \subset UK$, pues de lo contrario podríamos tomar $h \in F \setminus UK$, lo que implica que $U \cup \{h\}$ también cumple la propiedad (K es simétrico) contradiciendo así la maximalidad. Por lo tanto, se obtiene $|U||K| \geq |UK| \geq |F|$. □

Proposición 1.2.19. *Sea G un grupo, X un subshift fuertemente irreducible no vacío y sea $K \Subset G$ una constante de irreducibilidad fuerte para X. Para todo $F \Subset G$, se tiene*

$$|L_F(X)| \geq \left|L_{\{\mathbf{1}_G\}}(X)\right|^{\frac{|F|}{2|K|}}.$$

Demostración. Sea $K' = K \cup K^{-1}$. Por el Lema 1.2.18 existe $U \subset F$ tal que $|K'||U| \geq |F|$ y la colección $(\{g\})_{g \in U}$ es K'-disjunta. Como X es fuertemente irreducible, el Lema 1.2.14 implica que para toda función $\sigma \colon U \to L_{\{\mathbf{1}_G\}}(X)$ existe una configuración $x_\sigma \in X$ tal que $x_\sigma(g) = \sigma(g)(\mathbf{1}_G)$ para cada $g \in U$. Se concluye que

$$|L_F(X)| \geq |L_U(X)| \geq |L_{\{\mathbf{1}_G\}}(X)|^{|U|} \geq |L_{\{\mathbf{1}_G\}}(X)|^{\frac{|F|}{|K'|}} \geq |L_{\{\mathbf{1}_G\}}(X)|^{\frac{|F|}{2|K|}}.$$

□

En particular, si X es un subshift fuertemente irreducible no trivial, para todo $F \Subset G$ se tiene

$$|L_F(X)| \geq 2^{\frac{|F|}{2|K|}}.$$

1.3 Grupos de automorfismos y algunos resultados elementales

Dados dos subshifts G-invariantes X y Y, una aplicación $\varphi \colon X \to Y$ se llama **morfismo** si es continua y G-equivariante (es decir, si $\varphi(gx) = g\varphi(x)$ para todo $x \in X$ y $g \in G$). El conjunto de todos los morfismos de X se denota por $\mathrm{End}(X)$. El teorema de Curtis-Hedlund-Lyndon proporciona una caracterización de estos morfismos mediante funciones locales; lo llamaremos el **Teorema CHL**.

Teorema 1.3.1 (Teorema CHL)**.** *Una aplicación $\varphi \colon A^G \to B^G$ es un morfismo si y solo si existe un conjunto finito $F \Subset G$ y una función $\Phi \colon A^F \to B$ tal que, para todo $x \in A^G$ y $g \in G$, se cumple*

$$\varphi(x)(g) = \Phi((g^{-1}x)|_F).$$

Demostración. ($\Leftarrow$) Debemos probar que la función φ es continua y G- invariante. Sea $F \Subset G$ y Φ como en las hipótesis, llamaremos a F el conjunto memoria y a Φ la aplicación local. Así, para todo $h, g \in G$ y $x \in A^G$ tenemos: $\varphi(gx)(h) = \Phi(h^{-1}gx|_F) = \Phi((g^{-1}h)^{-1}x|_F) = \varphi(x)(g^{-1}h) = g\varphi(x)(h)$. Luego φ es G- invariante.

Para demostrar que φ es continua. Sea $x \in A^G$, tomamos una vecindad W de $\varphi(x) \in B^G$, debemos asegurar que existe una vecindad U de x, tal que $\varphi(U) \subset W$. Sea $H \subset G$ tal que $U_H(\varphi(x)) := \{\varphi(y) \in B^G \colon \varphi(y)|_H = \varphi(x)|_H\} \subset W$. Consideremos el conjunto $HF \subset G$ y sea $y \in U_{HF}(x)$, para $h \in H$ tenemos que $\varphi(y)(h) = \phi(h^{-1}y|_F) = \phi(y|_{hF}) = \phi(x|_{hF}) = \phi(h^{-1}x|_F) = \varphi(x)(h)$, es decir, $\varphi(y) \in U_H(\varphi(x)) \subset W$. De esta manera, tenemos que:

$$\varphi(U_{FH}(x)) \subset U_H(\varphi(x)) \subset W.$$

($\Rightarrow$) Hay que probar que para φ existe $F \Subset G$ y $\Phi : A^F \to B$ tal que $\varphi(x)(g) = \Phi(g^{-1}x|_F)$. Sea $\phi : A^G \to B$ una aplicación continua definida como $\phi(x) = \pi_{1_G} \circ \varphi(x)$. Podemos ver que es continua, pues las proyecciones son continuas en la topología pro discreta. Dado lo anterior, podemos encontrar para $x \in A^G$, un conjunto $H_x \subset G$ (depende de x), tal que para $y \in U_{H_x}(x)$ tenemos que $\phi(x) = \phi(y) \Rightarrow \pi_{1_G} \circ \varphi(x) = \pi_{1_G} \circ \varphi(y) \Rightarrow \varphi(x)(1_G) = \varphi(y)(1_G)$. Es claro que, $A^G \subset \bigcup_{x \in A^G} U_{H_x}(x)$. Dado que A^G es compacto, existe un subrecubrimiento finito, es decir, existe $V \Subset A^G$ tal que los conjuntos U_{H_x} con $x \in V$ cubren A^G. Definamos $F = \bigcup_{x \in V} U_{H_x}$, y supongamos que existen dos configuraciones $y, z \in A^G$ tal que $y|_F = z|_F$, sea $x' \in F$ tal que $y \in U_{H_{x'}}(x')$, como $H_{x'}(x') \subset F$, tenemos que $z \in U_{H_{x'}}(x')$ con lo cual podemos afirmar que $\varphi(x')(1_G) = \varphi(y)(1_G) = \varphi(z)(1_G)$. Con lo anterior demostramos que existe una aplicación $\Phi : A^F \to B$ tal que $\varphi(x)(1_G) = \Phi(x|_F)$, la cual está bien definida pues verificamos que no dependía de la vecindad local del punto. Para finalizar, dado que φ es G- invariante, tenemos que:

$$\varphi(x)(g) = \varphi(g^{-1}x)(1_G) = \Phi(g^{-1}x|_F).$$

Con lo que queda demostrado el teorema. □

Nota 1.3.2. La demostración anterior es una modificación de la prueba de [6, Theorem 1.2]. Además, este resultado se puede extender para subshifts, teniendo siempre en cuenta que el dominio de la aplicación local se restringe a los lenguajes de los subshifts.

Un morfismo $\phi \colon X \to Y$ se denomina **aplicación de factor topológica** si es sobreyectiva, y **conjugación topológica** si es biyectiva.

Definición 1.3.3. El grupo de automorfismos de un subshift X es el conjunto $\mathrm{Aut}(X)$ de todos los automorfismos G-equivariantes $\varphi \colon X \to X$, con la composición como operación de grupo.

En otras palabras, $\mathrm{Aut}(X)$ es el grupo de todas las conjugaciones topológicas de X en X. Como consecuencia del Teorema CHL (Teorema 1.3.1), para todo grupo contable G y subshift X, $\mathrm{Aut}(X)$ es contable.

Definición 1.3.4. El **shift derecho** por un elemento $g \in G$ es la aplicación $\tau_g \colon A^G \to A^G$ definida por

$$\tau_g(x)(h) = x(hg) \text{ para todo } x \in A^G \text{ y } h \in G.$$

Notemos que para cualquier $g \in G$, la aplicación del shift derecho τ_g es G-equivariante (con respecto a la acción izquierda). De hecho, para cada $h \in G$ se tiene

$$\tau_g(hx)(t) = (hx)(tg) = x(h^{-1}tg) = \tau_g(x)(h^{-1}t) = h(\tau_g(x))(t).$$

Sin embargo, el shift izquierdo $x \mapsto g^{-1}x$ no es G-equivariante a menos que $g \in Z(G)$, en cuyo caso coincide con el shift derecho.

Proposición 1.3.5. *Para todo grupo G, se tiene que G se incrusta en* $\mathrm{Aut}(A^G)$.

Demostración. Sea $g \in G$. El shift derecho τ_g es un automorfismo de A^G que es G-equivariante, por lo que $\tau_g \in \mathrm{Aut}(A^G)$. Claramente, $\tau_g \circ \tau_h = \tau_{gh}$ y $\tau_g = \tau_h$ si y solo si $g = h$, de modo que la aplicación $g \mapsto \tau_g$ es un monomorfismo de G en $\mathrm{Aut}(A^G)$. □

Cabe notar que, para un subshift $X \subset A^G$, en general no es cierto que el shift derecho sea automorfismo de X, debido a que X no es necesariamente invariante bajo este shift. De hecho, como veremos en el siguiente ejemplo, es posible construir SFTs minimales infinitos en el grupo libre de dos generadores con grupo de automorfismos trivial.

Ejemplo 1.3.6. Sea F_2 el grupo libre sobre los generadores a, b y sea $A = \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$. Considere el subshift

$$X = \{x \in A^{F_2} : \text{ para todo } g \in F_2, \text{ si } x(g) = t, \text{ entonces para } s \in A \setminus \{t\}, \ x(gs) = s^{-1}\}.$$

Afirmamos que X es un F_2-SFT no contable y minimal. Para calcular el cardinal de X, sea $x \in X$, tal que $x(\mathbf{1}_{F_2}) = t$. A partir de esta elección, quedan determinados tres árboles vecinos en las direcciones $s \in A \setminus \{t\}$. En el árbol libre se encuentran todas las palabras reducidas de F_2 que inician con t. La elección de un símbolo para $x(t)$ vuelve a fijar nuevamente otros tres árboles. De esta manera, por cada elemento del árbol libre tenemos tres opciones de configuraciones que serán admitidas por X, esto se resume en una cantidad no contable de configuraciones. Para la minimalidad, damos algunas ideas para ver que cualquier $x \in X$ tiene órbita densa. Para ello, considere $y \in X$ tal que $y(\mathbf{1}_{F_2}) = t$. Nuevamente, tenemos tres árboles predeterminados (ver Figura 1.5) y cualquier patrón admitido por $\mathrm{L}(X)$ está contenido en cada uno de esos árboles, por lo tanto, cada patrón alrededor de $z(\mathbf{1}_{F_2})$ con $z \in X$ se puede ver en dichos árboles. Si queremos ser un poco más precisos, podemos definir la métrica sobre A^{F_2} como $d(x, y) = 2^{-\max\{n \geq 0 \colon x|_{E_n} = y|_{E_n}\}}$ para $x \neq y$, ver [6, Remark 1.9.2], usando E_n como la bola de radio n centrada en la identidad, viendo F_2 como un grafo de Cayley con generadores $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$. Con esta métrica se puede construir directamente la sucesión de patrones desde $z(\mathbf{1}_{F_2})$ hasta el patrón admitido por $\mathrm{L}(X)$ contenido en un árbol sombreado. Así, X es minimal.

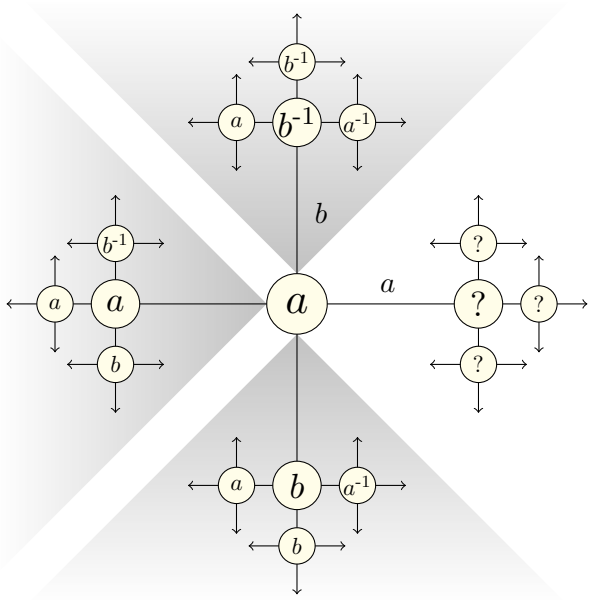


Figura 1.5: Tres árboles están fijos por el símbolo en el origen.

Argumentaremos que $\mathrm{Aut}(X)$ es trivial. Sea $x \in X$ tal que $x(\mathbf{1}_{F_2}) = t$, entonces para cada $s \in A \setminus \{t\}$ tenemos un árbol que fija los valores de x y éstos deben "apuntar hacia $\mathbf{1}_{F_2}$". El Teorema CHL (Teorema 1.3.1) implica que cualquier automorfismo $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$ actúa localmente como la identidad sobre patrones suficientemente grandes contenidos en estos árboles. Sea $F \Subset F_2$ como en el Teorema CHL (Teorema 1.3.1). Sea $p \in \mathrm{L}_F$ un patrón con soporte F y definimos el conjunto $S_{[p]}(x) = \{g \in F_2 : g^{-1}x \in [p]\}$. Como X es compacto y minimal, se sigue que para el cilindro $[p] \subset X$, existe un conjunto finito $F_p \Subset F_2$ tal que para $g \in F_2$ existe $f \in F_p$ con $fg^{-1}x \in [p]$. Esto es equivalente a decir que $gf^{-1} \in S_{[p]}$, es decir, $g \in S_{[p]}F_p$. Por lo tanto, $F_2 = S_{[p]}F_p$. Esto implica que para todo $g \in F_2$, existe una traslación f por elementos de F_p tal que g pertenece a una ocurrencia de p en x. En particular, p aparece en alguno de los árboles fijos. Dado que φ actúa como la identidad en los árboles fijos, la minimalidad de X fuerza a que φ sea la identidad en todo F_2.

El inconveniente anterior no surge si se considera el shift derecho por elementos de $Z(G)$, ya que en ese caso, el shift coincide con el shift izquierdo y la G-invarianza de X garantiza que τ_g es un homeomorfismo. Al tomar el cociente por $\mathrm{Fix}(X)$, se obtiene el siguiente resultado general.

Proposición 1.3.7. *Sea $X \subset A^G$ un subshift. Entonces, $\langle \tau_g : g\,\mathrm{Fix}(X) \in Z(G/\mathrm{Fix}(X))\rangle$ es un subgrupo de $Z(\mathrm{Aut}(X))$, y es isomorfo a $Z\left({}^{G}\!/_{\mathrm{Fix}(X)}\right)$.*

Demostración. Verificamos que $\tau_g \in Z(\mathrm{Aut}(X))$ para cada $g \in G$ tal que $g\,\mathrm{Fix}(X) \in Z(G/\mathrm{Fix}(X))$, y por tanto

$$\langle \tau_g : g\,\mathrm{Fix}(X) \in Z(G/\mathrm{Fix}(X))\rangle \leq Z(\mathrm{Aut}(X)).$$

Sea $g \in G$ como se indica. Dado que X es invariante bajo G, también lo es bajo $G/\mathrm{Fix}(X)$

mediante la acción natural. Como $g\,\mathrm{Fix}(X) \in Z(G/\mathrm{Fix}(X))$, tenemos que para todo $h \in G$, $hg\,\mathrm{Fix}(X) = gh\,\mathrm{Fix}(X)$ lo que implica que $(gh)^{-1}hg \in \mathrm{Fix}(X)$, es decir, existe un $\gamma \in \mathrm{Fix}(X)$ tal que $hg = gh\gamma = \gamma gh$. Teniendo lo anterior en cuenta, sea $\tau_g(x)(h) = x(hg) = x(\gamma gh) = \gamma^{-1}x(gh) = x(gh) = g^{-1}x(h)$ para todo $x \in X$, lo que implica que $\tau_g \in \mathrm{Aut}(X)$. Además, para cualquier $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$,

$$\varphi(\tau_g(x)) = \varphi(g^{-1}x) = g^{-1}\varphi(x) = \tau_g(\varphi(x)).$$

Por ello, $\tau_g \in Z(\mathrm{Aut}(X))$.

La aplicación

$$f\colon Z\left(G/\mathrm{Fix}(X)\right) \to \langle \tau_g : g\,\mathrm{Fix}(X) \in Z(G/\mathrm{Fix}(X))\rangle, \quad f(g\,\mathrm{Fix}(X)) = \tau_g,$$

es un homomorfismo inyectivo, pues si $\tau_g(x) = \tau_{g'}(x) \iff g^{-1}x = g'^{-1}x \iff g'g^{-1}x = x$, esto implica que $g'g^{-1} \in \mathrm{Fix}(X) \iff g'\,\mathrm{Fix}(X) = g\,\mathrm{Fix}(X)$ y su imagen es precisamente $\langle \tau_g : g\,\mathrm{Fix}(X) \in Z(G/\mathrm{Fix}(X))\rangle$. □

El siguiente teorema es la generalización de [5, Theorem 3.1] a grupos arbitrarios.

Teorema 1.3.8. *Sea G un grupo y $X \subset A^G$ un subshift. Si el conjunto de puntos con órbita finita bajo $G \curvearrowright X$ es denso en X, entonces* $\mathrm{Aut}(X)$ *es residualmente finito. En particular,* $\mathrm{Aut}(A^G)$ *es residualmente finito si y solo si G es residualmente finito.*

Demostración. Sea $H \leqslant G$ y sea $\mathrm{Stab}_H(X) = \{x \in X : hx = x \text{ para todo } h \in H\}$. Observamos que cuando H tiene índice finito, este conjunto es finito. Además, para cada $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$, el conjunto $\mathrm{Stab}_H(X)$ es invariante bajo φ, por lo que el mapa restringido $\varphi|_{\mathrm{Stab}_H(X)}\colon \mathrm{Stab}_H(X) \to \mathrm{Stab}_H(X)$ induce una permutación en $\mathrm{Sym}(\mathrm{Stab}_H(X))$.

Sea K_H el núcleo de la aplicación restringida $\psi_H\colon \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Sym}(\mathrm{Stab}_H(X))$ dado por $\psi_H(\varphi) = \varphi|_{\mathrm{Stab}_H(X)}$. Notemos que K_H es un subgrupo normal de índice finito en $\mathrm{Aut}(X)$ siempre que H sea un subgrupo de índice finito de G.

Supongamos que el conjunto de puntos con órbita finita es denso en X, afirmamos que

$$\bigcap_{\substack{H\leqslant G\\ [G:H]<\infty}} K_H = \{\mathbf{1}_{\mathrm{Aut}(X)}\}$$

Sea $\varphi \in \bigcap\{K_H : H \leq G, [G:H] < \infty\}$, y sea $\Phi\colon A^F \to A$ una regla local que define a φ como en el teorema de CHL. Sin pérdida de generalidad, asumimos que $1_G \in F$. Sea $p \in L_F(X)$. Dado que $[p]$ es abierto y las configuraciones con órbita finita son densas en X, existe $x \in X$ con órbita finita y $x \in [p]$. Según la definición de φ, $\varphi(x)(\mathbf{1}_G) = \Phi(x|_F) = \Phi(p)$. Como $\varphi(x) = x$, se sigue que $\Phi(p) = x(\mathbf{1}_G) = p(\mathbf{1}_G)$. Esto prueba que la regla local Φ satisface $\Phi(p) = p(\mathbf{1}_G)$ para cada $p \in L_F(X)$, y por lo tanto φ es la aplicación identidad en X. Concluimos que $\varphi = \mathbf{1}_{\mathrm{Aut}(X)}$, y así $\mathrm{Aut}(X)$ es un grupo residualmente finito.

En el caso en que $X = A^G$, es bien sabido que el conjunto de puntos con órbitas finitas es denso cuando G es residualmente finito (ver [6, Teorema 2.7.1]), y por lo tanto $\mathrm{Aut}(A^G)$ es residualmente finito. La implicación inversa se sigue de la Proposición 1.3.5 y del hecho de que cada subgrupo de un grupo residualmente finito también es residualmente finito. □

Finalizamos esta sección recopilando algunos hechos básicos sobre las restricciones de subshifts fuertemente irreducibles.

Proposición 1.3.9. *Sea G un grupo y sea $X \subset A^G$ un G-subshift fuertemente irreducible no trivial con constante K. Sea $H \leqslant G$ con $K \subset H$, y considere el H-subshift $X|_H = \{x|_H \in A^H : x \in X\}$. Entonces:*

(1) K es una constante de irreducibilidad fuerte para $X|_H$.

(2) $\mathrm{Fix}(X|_H) = \mathrm{Fix}(X)$.

(3) X puede definirse mediante un conjunto de patrones prohibidos cuyo soporte está contenido en H.

(4) Para todo $x \in X$ y $y \in X|_H$, $x|_{G \setminus H} \vee y$ pertenece a X.

(5) X tiene la propiedad TMP fuerte si y solo si $X|_H$ tiene la propiedad TMP fuerte.

(6) $\mathrm{Aut}(X|_H)$ *se incrusta en* $\mathrm{Aut}(X)$.

Demostración. **(1)** se sigue directamente de la definición. Con respecto a **(2)**, es claro que $\mathrm{Fix}(X) \subset \mathrm{Fix}(X|_H)$. Sea $h \notin \mathrm{Fix}(X)$, entonces existe $x \in X$ tal que $hx \neq x$, es decir, existe $g \in G$ tal que $hx(g) \neq x(g)$. Por lo tanto, si tomamos $y = g^{-1}x$, se cumple que $(hy)(\mathbf{1}_G) \neq y(\mathbf{1}_G)$ y así $(hy)|_H \neq y|_H$. Por lo tanto, $h \notin \mathrm{Fix}(X|_H)$.

Para probar **(3)**, tomemos $\mathcal{F} = \mathrm{L}(A^H) \setminus \mathrm{L}(X|_H)$ y sea $X_{\mathcal{F}} \subset A^G$ el $G-$subshift definido prohibiendo $\mathcal{F}$. Probaremos que $X = X_{\mathcal{F}}$. La inclusión $X \subset X_{\mathcal{F}}$ es clara. Para la otra inclusión, basta demostrar que $\mathrm{L}(X_{\mathcal{F}}) \subset \mathrm{L}(X)$. Sea $p \in \mathrm{L}(X_{\mathcal{F}})$ un patrón con soporte $F \Subset G$. Particionamos $F = g_1F_1 \sqcup \cdots \sqcup g_nF_n$ de tal manera que para distintos $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, se tenga $F_i \Subset H$ y $g_iH \cap g_jH = \varnothing$.

Para cada F_i, escribimos $p_i = p|_{g_iF_i}$. Es claro por la definición de $X_{\mathcal{F}}$ que cada p_i debe pertenecer a $\mathrm{L}(X)$. Dado que K es una constante de irreducibilidad fuerte para X y $(F_i)_{i=1}^n$ es K-disjunto, se deduce que $p = p_1 \vee \cdots \vee p_n \in \mathrm{L}(X)$.

Para la demostración de **(4)**, utilizamos el mismo conjunto $\mathcal{F}$ de **(3)**. Si $x \in X$ y $y \in X|_H$, entonces $x|_{G \setminus H} \vee y$ no contiene ningún patrón prohibido de $\mathcal{F}$, y así pertenece a $X = X_{\mathcal{F}}$.

A continuación probamos **(5)**. Supongamos primero que $X|_H$ tiene la propiedad TMP fuerte con constante de memoria $M \Subset H$. Afirmamos que M también es una constante de memoria para X. Sea $F \Subset G$ y tomemos $x, y \in X$ tales que $x|_{FM \setminus F} = y|_{FM \setminus F}$. Como en la demostración

de **(3)**, particionamos $F = g_1F_1 \sqcup \cdots \sqcup g_nF_n$ en cosets izquierdos disjuntos de H y para $i \in \{1, \ldots, n\}$ tomamos $x_i = (g_i^{-1}x)|_H$ y $y_i = (g_i^{-1}y)|_H$. Se sigue que $x_i|_{F_iM \setminus F_i} = y_i|_{F_iM \setminus F_i}$ y así $z_i = x_i|_{F_i} \vee y_i|_{H \setminus F_i} \in X|_H$.

Tomemos $w_0 = y$ y para $i \in \{1, \ldots, n\}$ definimos $w_i = g_i((g_i^{-1}w_i)|_{G \setminus H} \vee z_i)$. Un cálculo simple muestra que $w_n = x|_F \vee y|_{G \setminus F}$. Iterando el resultado de la parte **(4)**, tenemos que cada $w_i \in X$ y, por lo tanto, X tiene la propiedad TMP fuerte con constante M.

Finalmente mostramos **(6)**: definimos un homomorfismo inyectivo $f\colon \mathrm{Aut}(X|_H) \to \mathrm{Aut}(X)$ de la siguiente manera. Sea $\varphi \in \mathrm{Aut}(X|_H)$, y sea $\Phi\colon A^F \to A$, con $F \Subset H$ un conjunto de memoria y una regla local que define φ, la cual existe por el Teorema CHL (Teorema 1.3.1). Denotamos por $f(\varphi)$ el morfismo $f(\varphi)\colon X \to X$ definido por la misma regla local, es decir, $\big(f(\varphi)(x)\big)(g) = \Phi((g^{-1}x)|_F)$ para $x \in X$ y $g \in G$.

La asociación $\varphi \to f(\varphi)$ es independiente de la regla local elegida. Además, el ítem **(3)** muestra que esta aplicación está bien definida, en el sentido de que $f(\varphi)(x)$ pertenece a X para todo $x \in X$. Un cálculo directo muestra que $f(\varphi \circ \psi) = f(\varphi) \circ f(\psi)$ para todo $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(X|_H)$. Como $f(\varphi)$ es invertible y su inversa $f(\varphi^{-1})$ es continua, se sigue que $f(\varphi)$ pertenece a $\mathrm{Aut}(X|_H)$ para todo $\varphi \in \mathrm{Aut}(X)$. Finalmente, si $f(\varphi)$ actúa trivialmente en X, entonces φ debe actuar trivialmente en $X|_H$, por lo que f es inyectiva. □

Capítulo 2

Marcadores

2.1 Marcadores en grupos infinitos

Es conveniente para nosotros considerar traslaciones de patrones. Dado un patrón $p \in A^F$ y un elemento $g \in G$, denotamos por gp el patrón con soporte gF definido por $gp(gh) = p(h)$ para cada $h \in F$ (o equivalentemente, $gp(t) = p(g^{-1}t)$ para cada $t \in gF$). Decimos que p es $g-$**superpuesto** si $p(h) = gp(h)$ para cada $h \in F \cap gF$. De manera informal, esto corresponde a la intuición de que los patrones p y gp pueden "solaparse". Si la condición anterior no se cumple, decimos que p es **no** $g-$**superpuesto**.

Además, utilizamos la siguiente notación: para un grupo G dotado de una métrica de la palabra, escribimos $\operatorname{diam}(G) = \sup_{g \in G} |g|$. También, para $0 \leq r < R$, escribiremos

$$B(r, R) = \{g \in G : r < |g| \leq R\} = B(R) \setminus B(r)$$

para el anillo de radio interior $r + 1$ y radio exterior R.

Definición 2.1.1. Sea G un grupo y sea X un subshift de G. Dados $Y \subsetneq W \Subset G$, un (Y, W)-**marcador** para X es un patrón $p \in \mathrm{L}_{W \setminus Y}(X)$ que es no $g-$superpuesto para todo $g \in WY^{-1} \setminus \operatorname{Fix}(X)$. Decimos que X es **marcable** cuando para todo $Y \Subset G$ existe $W \Subset G$ y un (Y, W)-marcador para X.

1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0			0	1
1	0			0	1
1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

Figura 2.1: Un $(\{2,3\}^2, \{0,\ldots,5\}^2)$-marcador en $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$.

Trabajos previos han establecido condiciones suficientes para que los SFT en $\mathbb{Z}^d$ sean marcables. Por ejemplo, Ward [35] demostró que ser infinito y fuertemente irreducible es una condición suficiente, y Hochman [18] demostró que tener entropía topológica positiva también es una condición suficiente. El resultado principal de esta sección es que, sin la hipótesis de ser un SFT, la

irreducibilidad fuerte es una condición suficiente para ser marcable, y esto es válido en cualquier grupo infinito.

Teorema 2.1.2. *(Teorema A) Cada subshift fuertemente irreducible en un grupo infinito es marcable. Más aún, si el grupo es finitamente generado y dotado con una métrica de la palabra, entonces el subshift admite $(B(r), B(37r))$-marcadores para todo r suficientemente grande.*

Nota 2.1.3. Nuestra definición de marcador es ligeramente diferente a la usada en [3, 18, 35]. Las definiciones coinciden (en $\mathbb{Z}^d$) para un subshift X donde la acción es fiel (esto es, $\mathrm{Fix}(X) = \{\mathbf{1}_G\}$). Por otra parte, nuestra definición es más flexible en el sentido de que una gran clase de subshifts tiene marcadores. Por ejemplo, el subshift

$$X = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : \forall a, b \in \mathbb{Z}\ x(a,b) = x(a,b+1)\},$$

es marcable de acuerdo a nuestra definición, pues sacamos desde la definición las traslaciones por elementos de $\mathrm{Fix}(X)$, mientras que ningún patrón en este lenguaje es un marcador de acuerdo a la definición en [18, 35].

Nota 2.1.4. Un subshift trivial es fuertemente irreducible y marcable, pues $\mathrm{Fix}(X) = G$ y la propiedad se cumple vacíamente. Con excepción de este caso, un subshift fuertemente irreducible X siempre cumplirá que $|\mathrm{Fix}(X)| < \infty$ (Lema 1.2.15) y será importante para nuestras aplicaciones que el Teorema A cubra estos casos.

A continuación se presentan algunas propiedades útiles de los marcadores. La siguiente propiedad de monotonía de los marcadores se sigue directamente de la definición.

Observación 2.1.5. Sea p es un (Y, W)-marcador para un subshift X, si $Y' \subset Y$ y $q \in \mathrm{L}_{W \setminus Y'}(X)$ son tales que $q|_{W \setminus Y} = p$, entonces q es un (Y', W)-marcador para X.

Proposición 2.1.6. *Las siguientes propiedades son equivalentes para un subshift X en un grupo contable infinito G.*

1. *Para cada $Y \Subset G$ existe una sucesión de (Y, W_n)-marcadores para X tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n = G$.*
2. *X es marcable.*
3. *Existe $Y_0 \Subset G$ tal que para cada $Y \Subset G$ con $Y_0 \subset Y$, existe un (Y, W)-marcador en X.*
4. *Existe una sucesión de (Y_n, W_n)-marcadores para X tal que $Y_n \subset Y_{n+1}$ para todo n, y $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Y_n = G$.*

Demostración. Las implicaciones $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$ son directas, y $4 \Rightarrow 1$ se sigue de la Observación 2.1.5. □

La cuarta condición muestra que, en el caso de un grupo finitamente generado con una métrica de la palabra, si un subshift X admite una constante $\lambda > 1$ tal que X admite $(B(r), B(\lambda r))$-marcadores para todo r suficientemente grande, entonces X es marcable. No esperamos que la

constante $\lambda = 37$ en el Teorema A sea óptima, pero reducir esta constante no tiene efecto en nuestras aplicaciones.

2.1.1 Esquema de la prueba del Teorema A

El núcleo de la prueba del Teorema A está contenido en el siguiente resultado técnico, que se aplica tanto a grupos finitos como a grupos finitamente generados infinitos:

Proposición 2.1.7. *Sea G un grupo finitamente generado dotado con una métrica de la palabra, y sea X un G-subshift fuertemente irreducible no trivial con una constante $K \Subset G$ que asumimos simétrica. Sea $k \geq 1$ tal que $K \subset B(k)$ y sea r un número entero positivo que verifique las siguientes condiciones:*

1. $|B(38r)| < |\,\mathrm{L}_{B(r-k)}(X)|$.
2. $\mathrm{diam}(G) > 38r$.
3. $r > 16k|K^3| + 2k$.

Entonces, X admite un $(B(r), B(37r))$-marcador.

Resaltamos que las condiciones que involucran bolas en este resultado están relacionadas con la métrica de la palabra inducida. Probaremos más adelante que si G es infinito, entonces para todo r suficientemente grande se cumplen las condiciones de la Proposición 2.1.7. Esto demostrará el Teorema A para grupos finitamente generados. En el caso de grupos localmente finitos, demostraremos el Teorema A aplicando la Proposición 2.1.7 a una sucesión bien elegida de subgrupos finitos. La prueba del Teorema A para un grupo infinito general se reducirá a estos dos casos usando la Proposición 1.3.9 en un subconjunto adecuado.

La estrategia para probar la Proposición 2.1.7 será la siguiente. Fijamos G, X, K, k y r como en el enunciado. Construiremos por separado tres patrones, que denominaremos de **rango largo**, **rango medio** y **rango corto**.

1. **Rango largo**: un patrón $p_l \in \mathrm{L}(X)$ con soporte $B(6r, 37r)$ que es no g-superpuesto para todo $g \in B(2r, 38r)$.
2. **Rango medio**: un patrón $p_m \in \mathrm{L}(X)$ con soporte $B(r, 5r)$ que es no g-superpuesto para $g \in B(2r) \setminus K^3$.
3. **Rango corto**: un patrón $p_c \in \mathrm{L}(X)$ con soporte $B(8k|K^3|)$ que es no g-superpuesto para todo $g \in K^3 \setminus \mathrm{Fix}(X)$.

La irreducibilidad fuerte de X implica la existencia de un patrón $p \in \mathrm{L}_{B(r,37r)}(X)$ que tenga a p_l, p_m y una traslación de p_c como sub-patrones, pues los soportes de los patrones están separados por

al menos $r/2 > k$ y $K \subset B(k)$. Las propiedades de p_l, p_m y p_c aseguran que p es un $(B(r), B(37r))$-marcador.

Nuestra construcción de patrones de rango largo está inspirada en los argumentos de [18, Sección 3.2]. Sin embargo, estas ideas no se pueden aplicar directamente si G tiene elementos de torsión, y este problema se resuelve combinando patrones de rango medio y rango largo. A pesar de que esto es bastante sutil en los argumentos, esta es la principal dificultad abordada en nuestra prueba.

Prueba de la Proposición 2.1.7

Sea G un grupo, sea $F \Subset G$, y sea $p \in A^F$ un patrón. Recordemos que gp es el patrón con soporte gF definido por $gp(h) = p(g^{-1}h)$, que p es g-superpuesto cuando $p(h) = gp(h)$ para cada $h \in F \cap gF$, y es no g-superpuesto si se incumple la condición anterior. Los siguientes hechos se derivan directamente de las definiciones:

Observación 2.1.8. Sean $p \sqsubset q$ patrones. Si q es g-superpuesto, entonces p es g-superpuesto. Así mismo, si p es no g-superpuesto, lo mismo es cierto para q.

Observación 2.1.9. El patrón $p \in A^F$ es g-superpuesto si y solo si $p(h) = p(gh)$ para todo $h \in F \cap g^{-1}F$. Esto se sigue del hecho de que p es g-superpuesto si y solo si gp es (g^{-1})-superpuesto, si gp es (g^{-1})-superpuesto, $gp(h) = g^{-1}gp(h) = p(h)$ para cada $h \in gF \cap g^{-1}gF = F \cap gF$.

Para la construcción de los patrones de rango largo necesitaremos el siguiente resultado elemental.

Lema 2.1.10. *Sea $r \geq 4$ y G un grupo finitamente generado dotado de una métrica de la palabra tal que* $\mathrm{diam}(G) > 38r$. *Para todo $g \in B(38r)$, existe $h \in G$ tal que $hB(r) \subset B(6r, 37r) \cap gB(6r, 37r)$.*

Demostración. Supongamos primero que $14r + 2 \leq |g| \leq 38r$. Como $\mathrm{diam}(G) > 38r$, existe una sucesión de elementos del grupo $\mathbf{1}_G = g_0, g_1, \ldots, g_n = g$ con $n = |g|$, y $d(g_i, g_{i+1}) = 1$ para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Si n es par, tomamos $h = g_{n/2}$, y en caso contrario, $h = g_{(n+1)/2}$. En ambos casos, tenemos que $d(\mathbf{1}_G, h) \geq 7r + 1$ y $d(g, h) \geq 7r + 1$. De las desigualdades triangulares, se sigue fácilmente que $hB(r) \subset B(6r, 37r) \cap gB(6r, 37r)$.

Supongamos ahora que $|g| \leq 14r+1$, y tomemos h como un elemento del grupo con $|h| = 21r+2$. Es claro que con esta elección se tiene $hB(r) \cap B(6r) = \varnothing$, $hB(r) \cap gB(6r) = \varnothing$, y $hB(r) \subset B(37r)$. También tenemos que $d(h, g) \leq |g| + |h| \leq 35r + 4$, lo que implica que todos los elementos en $hB(r)$ están a una distancia máxima de $36r + 4$ de g. Como $r \geq 4$, se sigue que $hB(r) \subset gB(37r)$. Por lo tanto, $hB(r)$ tiene la propiedad deseada $hB(r) \subset B(6r, 37r) \cap gB(6r, 37r)$. □

Ahora procedemos a construir los patrones de rango largo, rango medio y rango corto mencionados anteriormente.

Lema 2.1.11 (Rango largo)**.** *Sea G, X, K, k y r como en la Proposición 2.1.7. Entonces existe un patrón $p \in \mathrm{L}_{B(6r,37r)}(X)$ que es no g-superpuesto para todo $g \in B(2r, 38r)$.*

Demostración. Para cada $g \in B(2r, 38r)$, denotamos por $M_r(g)$ el conjunto de patrones en $\mathrm{L}_{B(6r,37r)}(X)$ que son g-superpuesto.

Probamos una cota superior para la cardinalidad de $M_r(g)$, para un $g \in B(2r, 38r)$ fijo. Esto se hace examinando la intersección $B(6r, 37r) \cap gB(6r, 37r)$. Por Lema 2.1.10, existe un elemento $h \in G$ tal que $hB(r) \subset B(6r, 37r) \cap gB(6r, 37r)$.

Observemos que para cada $f \in hB(r)$, el elemento $g^{-1}f$ está en $B(6r, 37r)$, pero no está en $hB(r)$. Es más, $g^{-1}f \in B(6r, 37r)$ se sigue del hecho de que $hB(r) \subset gB(6r, 37r)$, y $g^{-1}f \notin hB(r)$ se cumple porque $|g| > 2r$.

Uniendo la observación del párrafo anterior con la Observación 2.1.9, podemos concluir lo siguiente. Si un patrón p con soporte $B(6r, 37r)$ es $g-$superpuesto entonces los valores de p en $hB(r)$ están determinados por los valores de p fuera de $hB(r)$, es decir, en $B(6r, 37r) \setminus hB(r)$. Así, cada patrón en $M_r(g)$ está determinado por sus valores en $B(6r, 37r) \setminus hB(r)$. Luego, hemos probado la cota

$$|M_r(g)| \leq |\,\mathrm{L}_{B(6r,37r)\setminus hB(r)}(X)|.$$

Ahora usamos el hecho de que K es una constante de irreducibilidad fuerte para X, y $K \subset B(k)$. Dado que $hB(r-k)K \cap (B(6r, 37r) \setminus hB(r)) = \varnothing$, tenemos

$$|\,\mathrm{L}_{B(6r,37r)\setminus hB(r)}(X)| \cdot |\,\mathrm{L}_{hB(r-k)}(X)| \leq |\,\mathrm{L}_{B(6r,37r)}(X)|.$$

Combinando las dos últimas desigualdades y usando que $|\,\mathrm{L}_{hB(r-k)}(X)| = |\,\mathrm{L}_{B(r-k)}(X)|$, obtenemos

$$|M_r(g)| \leq \frac{|\,\mathrm{L}_{B(6r,37r)}(X)|}{|\,\mathrm{L}_{B(r-k)}(X)|}. \tag{2.1}$$

Ahora definimos M_r como el conjunto de todos los patrones en $\mathrm{L}_{B(6r,37r)}(X)$ que son $g-$superpuestos para algún $g \in B(2r, 38r)$. Es decir, M_r es la unión de los $M_r(g)$, con g variando en $B(2r, 38r)$. La Ecuación (2.1) muestra que

$$\frac{|M_r|}{|\,\mathrm{L}_{B(6r,37r)}(X)|} \leq \sum_{g\in B(2r,38r)} \frac{|M_r(g)|}{|\,\mathrm{L}_{B(6r,37r)}(X)|} \leq \sum_{g\in B(2r,38r)} \frac{1}{|\,\mathrm{L}_{B(6r,37r)}(X)|} \cdot \frac{|\,\mathrm{L}_{B(6r,37r)}(X)|}{|\,\mathrm{L}_{B(r-k)}(X)|}$$

$$\leq \frac{|B(38r)|}{|\,\mathrm{L}_{B(r-k)}(X)|}.$$

Pero una hipótesis en la Proposición 2.1.7 es que $|B(38r)| < |L_{B(r-k)}(X)|$. Así que hemos probado que

$$\frac{|M_r|}{|\,\mathrm{L}_{B(6r,37r)}(X)|} < 1.$$

Esto implica que la proporción de elementos en $\mathrm{L}_{B(6r,37r)}(X)$ que no cumplen con la condición deseada (ser no $g-$superpuesto para todo $g \in B(2r, 38r)$) es estrictamente menor que 1. Esto prueba nuestra afirmación. □

Lema 2.1.12 (Rango medio)**.** *Sea G, X, K, k y r como en la Proposición 2.1.7. Entonces existe*

un patrón $p \in L_{B(r,5r)}(X)$ que es no $g-$superpuesto para todo $g \in B(2r) \setminus K^3$.

Demostración. Observe que la no trivialidad de X y la desigualdad $r > 16k|K^3| + 2k$ implica que $K \subset K^3 \subset B(r)$. Comenzamos construyendo dos patrones p_1 y p_2 en $\mathrm{L}(X)$ con soporte en $B(2r)$, y con la propiedad de que, para cada $g \in B(2r) \setminus K^3$, al menos uno de ellos p_1, p_2 es no g-superpuesto.

Para construir p_1 y p_2, fijamos un patrón $q \in \mathrm{L}(X)$ con soporte en K^2, y sea $\mathcal{H} = \{h_1, \ldots, h_n\}$ un subconjunto de $B(2r) \setminus K^3$ con la propiedad de que $\{h_i K : i = 1, \ldots, n\}$ es una colección de subconjuntos disjuntos de G, y $\mathcal{H}$ es maximal para inclusión. Dado que $K^3 \subset B(r)$ y $\mathrm{diam}(G) > 2r$, tenemos que $B(2r) \setminus K^3 \neq \varnothing$, y por lo tanto $\mathcal{H}$ no es vacío. Como X es fuertemente irreducible y $|X| > 1$, existen al menos dos símbolos diferentes a_1, a_2 en $\mathrm{L}_{\{\mathbf{1}_G\}}(X)$. El hecho de que K sea una constante de irreducibilidad fuerte para X muestra que para cada $i \in \{1, 2\}$ existe un patrón $p_i \in L(X)$ con soporte en $B(2r)$, con $p_i|_{K^2} = q$, y con $p_i(h) = a_i$ para todo $h \in \mathcal{H}$.

Observemos que para cada $g \in B(2r) \setminus K^3$, existe $g' \in K^2$ tal que $gg' \in \mathcal{H}$. Dado que $\mathcal{H}$ se eligió de manera maximal para inclusión, para cada $g \in B(2r) \setminus K^3$ debe existir $h \in \mathcal{H}$ con $gK \cap hK \neq \varnothing$. Dado que $K = K^{-1}$ por hipótesis, esto implica que $h = gg'$ para algún $g' \in K^2$.

Ahora verificamos que los patrones p_1 y p_2 cumplen con la condición deseada. Sea $g \in B(2r) \setminus K^3$ y sea g' como en el párrafo anterior. Como $a_1 \neq a_2$, al menos uno de ellos debe ser diferente de $q(g')$. Sea $i \in \{1, 2\}$ tal que $a_i \neq q(g')$. Entonces $p_i(gg') = a_i$, mientras que $gp_i(gg') = p_i(g') = q(g') \neq a_i$. Esto implica que p_i y gp_i tienen valores diferentes en gg' y, por lo tanto, p_i es no g-superpuesto. Es decir, p_1 y p_2 tienen la propiedad deseada.

Ahora combinamos p_1 y p_2 en un solo patrón. Observe que, dado que $\mathrm{diam}(G) > 6r$, existen dos elementos del grupo g_1 y g_2 tales que $|g_1| = |g_2| = 3r$ y $d(g_1, g_2) = 6r$.

Las hipótesis en la Proposición 2.1.7 aseguran que $r \geq k + 1$ y $K \subset B(k)$. Se sigue que $g_1 B(2r) K \cap g_2 B(2r) = \varnothing$. Por lo tanto, por irreducibilidad fuerte, existe un patrón $p \in \mathrm{L}_{B(r,5r)}(X)$ con $g_1 p_1 \sqsubset p$ y $g_2 p_2 \sqsubset p$. La Observación 2.1.8 implica que p es no g-superpuesto para todo $g \in B(2r) \setminus K^3$. □

Lema 2.1.13 (Rango corto)**.** *Sean G, X, K, k y r como en la Proposición 2.1.7. Entonces existe un patrón $p \in L(X)$ con soporte en $B(8k|K^3|)$ y que es no g-superpuesto para todo $g \in K^3 \setminus \mathrm{Fix}(X)$.*

Demostración. Comenzamos con una observación general. Sea $F \Subset G$ con $\mathbf{1}_G \in F$. Observe que para cada $g \in F \setminus \mathrm{Fix}(X)$, existe un patrón $p \in A^F$ que es no g-superpuesto. De hecho, si $g \notin \mathrm{Fix}(X)$, entonces existe $x \in X$ con $x \neq gx$. Al desplazar x, podemos suponer que $x(g) \neq x(\mathbf{1}_G)$. Afirmamos que $p = x|_F$ es no g-superpuesto. Basta con notar que p y gp tienen valores diferentes en $g \in F \cap gF$, ya que $p(g) = x(g)$ y $gp(g) = x(\mathbf{1}_G)$.

Aplicaremos la observación del párrafo anterior al conjunto K^3, que contiene $\mathbf{1}_G$ dado que X es no trivial. Sea $\{g_0, \ldots, g_{n-1}\} = K^3 \setminus \mathrm{Fix}(X)$. Según la observación anterior, para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ existe un patrón $p_i \in \mathrm{L}(X)$ con soporte en K^3 tal que p_i es no g_i-superpuesto.

También podemos elegir un elemento del grupo h_i con $|h_i| = 8ki$. Observe que de esta manera $h_iK^3 \subset B(8kn) \subset B(8k|K^3 \smallsetminus \mathrm{Fix}(X)|) \subset B(8k|K|^3)$ para cada $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Finalmente, dado que $k \geq 1$ y $K^7 \subset B(7k)$, se sigue que para cada par de índices distintos i, j en $\{0, \dots, n-1\}$ tenemos que $h_iK^3K \cap h_jK^3 = \varnothing$. Supongamos que existe $b \in h_iK^3K \cap h_jK^3$, luego, existe $k_1, k_3 \in K^3$ y $k_2 \in K$ tal que $b = h_ik_1^3k_2 = h_jk_3^3$. Dado que K es simétrica, tenemos que $h_j^{-1}h_i \in K^7 \subset B(7k)$. Sin pérdida de generalidad, asumimos $j > i$, de esta manera, $|h_j^{-1}h_i| \geq (j - i)8k$, pues $|h_j| = 8kj$, $|h_i| = 8ki$. Lo cual contradice que $h_j^{-1}h_i \in B(7k)$. Y, por lo tanto, la familia $(h_iK^3)_{i=1}^{n-1}$ es K-disjunta. Dado que K es una constante de irreducibilidad fuerte para X, se sigue que existe un patrón $p \in \mathrm{L}(X)$ con soporte en $B(8k|K^3|)$ tal que $p|_{h_iK^3} = h_ip_i$ para $i \in \{0, \dots, n-1\}$. La Observación 2.1.8 muestra que p es no g-superpuesto para todo $g \in K^3 \setminus \mathrm{Fix}(X)$. □

Ahora estamos listos para demostrar la Proposición 2.1.7

Demostración de la Proposición 2.1.7. Sea G, X, K, k y r como en la Proposición 2.1.7.

1. Por el Lema 2.1.11 existe un patrón $p_l \in \mathrm{L}(X)$ con soporte en $B(6r, 37r)$ que es no g-superpuesto para todo $g \in B(2r, 38r)$.

2. Por el Lema 2.1.12 existe un patrón $p_m \in \mathrm{L}(X)$ con soporte en $B(r, 5r)$ que es no g-superpuesto para $g \in B(2r) \smallsetminus K^3$.

3. Por el Lema 2.1.13 existe un patrón $p_c \in \mathrm{L}(X)$ con soporte en $B(8k|K^3|)$ que es no g-superpuesto para todo $g \in K^3 \smallsetminus \mathrm{Fix}(X)$.

La última hipótesis sobre r de la Proposición 2.1.7 establece que $r > 16k|K^3|+2k$. En particular, como $\mathrm{diam}(G) > 36r$, existe $h \in G$ con $|h| = 5r + k + 8k|K^3| < 6r$. Además, se sigue de $r - 2k > 2 \cdot 8k|K^3|$ que el soporte de hp_c está contenido en $B(5r + k, 6r - k)$. Dado que K es una constante de irreducibilidad fuerte para X y $K \subset B(k)$, se sigue que existe un patrón en $\mathrm{L}(X)$ con soporte en $B(r, 37r)$ y que tiene a p_m, hp_c y p_l como sub-patrones. Como $\mathrm{Fix}(X) \subset B(k)$ (Proposición 1.2.15), el patrón p es no g-superpuesto para todo $g \in B(38r) \smallsetminus \mathrm{Fix}(X)$. Es decir, p es un $(B(r), B(37r))$-marcador. □

2.1.2 Marcabilidad de subshifts fuertemente irreducibles

Dado que hemos demostrado la Proposición 2.1.7, ahora estamos listos para demostrar el Teorema A. Comenzamos demostrando la afirmación sobre los grupos finitamente generados infinitos.

Proposición 2.1.14. *Sea G un grupo finitamente generado infinito con una métrica de la palabra, y sea X un subshift no vacío, fuertemente irreducible. Entonces X admite $(B(r), B(37r))$-marcadores para todo r suficientemente grande.*

Demostración. Si X es trivial, entonces $\mathrm{Fix}(X) = G$ y la afirmación se satisface trivialmente. Supongamos que X es no trivial. Sea K y k como en la Proposición 2.1.7. Basta demostrar que todo r suficientemente grande satisface las condiciones (1), (2) y (3) en la Proposición 2.1.7. Dado que G es infinito, las condiciones (2) y (3) se satisfacen. Para demostrar que se cumple la primera condición, sea r suficientemente grande, probamos que:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{|B(38r)|}{|\,\mathrm{L}_{B(r-k)}(X)|} = 0. \tag{2.2}$$

Por un lado, tenemos que para todo $r \geq k$,

$$|B(38r)| \leq |B(r)|^{38} \leq |B(k)|^{38} \cdot |B(r-k)|^{38}.$$

Por otro lado, la no trivialidad de X y la Proposición 1.2.19 implican que

$$|\,\mathrm{L}_{B(r-k)}(X)| \geq 2^{\frac{|B(r-k)|}{2|K|}}$$

Así que tenemos

$$\frac{|B(38r)|}{|\,\mathrm{L}_{B(r-k)}(X)|} \leq |B(k)|^{38} \cdot |B(r-k)|^{38} \cdot 2^{-\frac{|B(r-k)|}{2|K|}}$$

Dado que G es infinito, para $r \to \infty$ $|B(r-k)|$ no está acotada y, por lo tanto, el lado derecho tiende a 0. Concluimos que la Ecuación (2.2) se cumple para r suficientemente grande. □

A continuación, demostramos el Teorema A para grupos localmente finitos. Necesitaremos la siguiente observación básica.

Observación 2.1.15. Sea G un grupo, sea X un G-subshift fuertemente irreducible, y sea $H \leqslant G$ un subgrupo que contiene una constante de irreducibilidad fuerte para X. Sea $Y \subset W \Subset H$. Entonces un patrón es un (Y, W)-marcador para X si y solo si es un (Y, W)-marcador para el subshift $X|_H = \{x|_H : x \in X\}$.

La Observación 2.1.15 se sigue de la definición de marcador y del hecho $\mathrm{Fix}(X) = \mathrm{Fix}(X|_H)$ (ver Proposición 1.3.9).

Proposición 2.1.16. *Sea G un grupo localmente finito e infinito, y sea $X \subset A^G$ un subshift no vacío, fuertemente irreducible. Entonces X es marcable.*

Demostración. Si X es trivial, también lo es la conclusión. Sea X un subshift no trivial y fuertemente irreducible, y sea K una constante de irreducibilidad fuerte para X tal que K es simétrica (y $\mathbf{1}_G \in K$). La Observación 2.1.15 muestra que para demostrar que X es marcable, basta con probar que para cada $Y \Subset G$ se cumple lo siguiente. Existe un grupo finito $H \leqslant G$ que contiene tanto a Y como a K, existe un conjunto $W \subset H$ tal que $Y \subset W$, y existe un (Y, W)-marcador para el subshift $X|_H$. Demostraremos que esto es cierto definiendo una sucesión $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subgrupos finitos de G, y aplicando la Proposición 2.1.7 a H_n para algún n suficientemente grande.

Antes de comenzar con la construcción, hagamos una observación de notación. Cada vez que elijamos un grupo finito $H \leqslant G$, también dotamos a H con un conjunto generador finito y simétrico, el cual determina una métrica. Siempre denotamos por $B^H(r)$ la bola en H de radio r en la métrica correspondiente.

Ahora procedemos con el argumento. Fijemos un conjunto no vacío $Y \Subset G$. Definimos una sucesión $(S_n)_{n\geq 0}$ de subconjuntos finitos de G de manera recursiva. Definimos $S_0 = Y \cup K$. Asumiendo que S_n ha sido definido, definimos $S_{n+1} = S_n \cup \{g_{n+1}\}$ donde g_{n+1} es cualquier elemento de G que no está en el subgrupo de G generado por S_n. Para cada n, sea G_n el subgrupo de G generado por S_n, y dotamos a G_n con la métrica determinada por el conjunto generador simétrico $S_n \cup S_n^{-1}$.

Notemos que cada G_n es finito porque G es localmente finito. Para aplicar la Proposición 2.1.7 necesitaremos algunos cálculos. El primer ingrediente para el argumento es que el conjunto generador elegido crece linealmente con n, mientras que la cardinalidad de G_n crece exponencialmente con n. Más precisamente:

Afirmación 2.1.17. *Sea $n \geq 1$ y $r \leq n$. Entonces tenemos $|B^{G_n}(r)| \geq 2^r |Y \cup K|$.*

De hecho, note que para cada $n \geq 0$ y $r \geq 0$, dado que $g_{n+1} \notin G_n$, tenemos que $B^{G_n}(r) \cap g_{n+1}B^{G_n}(r) = \varnothing$. A continuación, observamos que $|B^{G_{n+1}}(r+1)| \geq 2|B^{G_n}(r)|$. Esto se sigue del hecho de que $B^{G_{n+1}}(r+1)$ contiene tanto $B^{G_n}(r)$ como $g_{n+1}B^{G_n}(r)$, y estos conjuntos son disjuntos por la observación anterior. Ahora, para $n \geq 1$ y $r \leq n$, al iterar la relación anterior $r-1$ veces obtenemos

$$|B^{G_n}(r)| \geq 2^{r-1}|B^{G_{n-r+1}}(1)| \geq 2^{r-1}|B^{G_1}(1)| \geq 2^r|Y \cup K|.$$

Lo que prueba la afirmación.

Observe que al elegir $r = n$ en la Afirmación 2.1.17, obtenemos que $|G_n| \geq 2^n|Y \cup K|$ para cada $n \geq 1$. El último cálculo que necesitamos concierne a los diámetros de los grupos G_n con respecto a sus respectivas métricas.

Afirmación 2.1.18. *Existe $n_0 \geq 0$ tal que para todo $n \geq n_0$ tenemos* $\operatorname{diam}(G_{n^2}) > n$.

De hecho, dado que $S_{n^2} \cup S_{n^2}^{-1}$ tiene como máximo $2|Y \cup K| + 2n^2$ elementos, tenemos $|B^{G_{n^2}}(n)| \leq (2|Y \cup K| + 2n^2)^n$. Por otro lado, la Afirmación 2.1.17, implica que $|G_{n^2}| \geq 2^{(n^2)}|Y \cup K|$. Así que tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{|B^{G_{n^2}}(n)|}{|G_{n^2}|} &\leq \frac{(2|Y \cup K| + 2n^2)^n}{2^{(n^2)}|Y \cup K|} \\ &= \frac{1}{|Y \cup K|}\left(\frac{|Y \cup K| + n^2}{2^{n^2-1}}\right)^n\end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{|Y\cup K|+n^2}{2^{n^2-1}} = 0$, se sigue que $\lim_{n\to\infty} \frac{|B^{G_{n^2}}(n)|}{|G_{n^2}|} = 0$. Así, la Afirmación 2.1.18 se cumple.

Ahora, para cada $n \geq n_0$ definimos $H_n = G_{(38n)^2}$, y consideramos el H_n-subshift $X|_{H_n}$. Nuestro objetivo es aplicar la Proposición 2.1.7 al subshift $X|_{H_n}$ para algún n suficientemente grande. Observe que H_n viene dotado con una métrica de la palabra, que corresponde a un conjunto generador simétrico de cardinalidad a lo más $2|Y \cup K| + 2(38n)^2$ y que contiene $Y \cup K$.

Será importante en la siguiente parte que algunos elementos no varíen con n. Por la observación al principio de esta prueba, K es una constante de irreducibilidad fuerte para cada $X|_{H_n}$. Además, el valor k de la Proposición 2.1.7 puede elegirse uniformemente como $k = 1$ porque cada conjunto generador para H_n contiene K. Afirmamos que con estas elecciones y con $r = n$, se cumplen todas las condiciones de la Proposición 2.1.7 para algún n suficientemente grande. Es decir:

(1) $|B^{H_n}(38n)| < |L_{B^{H_n}(n-1)}(X|_{H_n})|$.

(2) $\operatorname{diam}(H_n) > 38n$.

(3) $n > 16|K|^3 + 2$.

La condición (2) se sigue directamente de la elección $H_n = G_{38n^2}$ y de la Afirmación 2.1.18. La condición (3) se cumple para todo n suficientemente grande simplemente porque K y $k = 1$ no dependen de n. Finalmente, dado que $\mathrm{L}_{B^{H_n}(n-1)}(X|_{H_n}) = \mathrm{L}_{B^{H_n}(n-1)}(X)$, basta con probar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|B^{H_n}(38n)|}{|\,\mathrm{L}_{B^{H_n}(n-1)}(X|_{H_n})|} = 0, \tag{2.3}$$

Para esto necesitaremos los cálculos previos sobre los grupos $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La no trivialidad de X y la Proposición 1.2.19 muestran que

$$\frac{|B^{H_n}(38n)|}{|L_{B^{H_n}(n-1)}(X)|} \leq |B^{H_n}(38n)| \cdot 2^{-\frac{|B^{H_n}(n-1)|}{2|K|}}. \tag{2.4}$$

Dado que la métrica para H_n está determinada por el conjunto generador $S_{(38n)^2} \cup (S_{(38n)^2})^{-1}$, y este conjunto tiene cardinalidad a lo más $2|Y \cup K| + 2(38n)^2$, se tiene que

$$|B^{H_n}(38n)| \leq (2|Y \cup K| + 2(38n)^2)^{38n}.$$

Además, la Afirmación 2.1.17 muestra que

$$|B^{H_n}(n-1)| \geq 2^{n-1}|Y \cup K|.$$

Por lo tanto, la Ecuación (2.4) puede reescribirse como

$$\frac{|B^{H_n}(38n)|}{|L_{B^{H_n}(n-1)}(X)|} \leq (2|Y \cup K| + 2(38n)^2)^{38n} \cdot 2^{-2^{n-2}\frac{|Y\cup K|}{|K|}}.$$

Dado que

$$\lim_{n\to\infty} 38n \log_2(2|Y \cup K| + 2(38n)^2) - 2^{n-2}\frac{|Y \cup K|}{|K|} = -\infty,$$

obtenemos que la Ecuación (2.3) se cumple para n suficientemente grande.

Tomemos n lo suficientemente grande para que se verifiquen todas las hipótesis de la Proposición 2.1.7 para el subshift $X|_{H_n}$ (y los parámetros K, k y $r = n$ definidos anteriormente). La Proposición 2.1.7 muestra que $X|_{H_n}$ admite un $(B^{H_n}(n), B^{H_n}(37n))$-marcador. Dado que $Y \subset B^{H_n}(n)$, se sigue de la Observación 2.1.5 que $X|_{H_n}$ también admite un $(Y, B^{H_n}(37n))$-marcador. Como se explicó al comienzo de la demostración, este patrón también es un $(Y, B^{H_n}(37n))$-marcador para el subshift X. Finalmente, dado que Y es arbitrario, esto prueba nuestra afirmación de que X es marcable.

□

Finalmente, mostramos el Teorema A en toda su generalidad.

Demostración del Teorema A. Sea G un grupo infinito, y sea X un subshift fuertemente irreducible. Si $|X| = 1$, entonces el resultado es cierto por la razón trivial de que $\mathrm{Fix}(X) = G$. Suponemos a partir de ahora que $|X| > 1$. Está claro que exactamente uno de los siguientes tres casos ocurre:

1. G es finitamente generado.
2. G no es finitamente generado, pero algún subgrupo finitamente generado de G es infinito.
3. Todos los subgrupos finitamente generados de G son finitos, por lo que G es infinito y localmente finito.

Si G es finitamente generado, el Teorema 2.1.14 muestra que para todo r lo suficientemente grande, X admite $(B(r), B(37r))$-marcadores, y esto implica que X es marcable por la Proposición 2.1.6. Si G es localmente finito, entonces la afirmación se sigue directamente del Teorema 2.1.16.

Por lo tanto, solo queda considerar el caso en que G no es finitamente generado, pero algún subgrupo finitamente generado $H \leqslant G$ es infinito. Sea $K \Subset G$ una constante de irreducibilidad fuerte para X, y sea $Y \Subset G$ un conjunto finito arbitrario. Consideremos el subgrupo $H' = \langle Y, K, H\rangle \leqslant G$ generado por H, Y y K. Así, H' es finitamente generado e infinito. Por la Proposición 1.3.9, el subshift $X|_{H'} = \{x|_{H'} : x \in X\}$ es fuertemente irreducible con constante K. Dado que ya hemos demostrado que el resultado se cumple para grupos infinitos finitamente generados, se sigue que existe un conjunto $W \Subset H'$ y un marcador (Y, W) para X'. La Observación 2.1.15 muestra que p también es un (Y, W)-marcador para X. Dado que el conjunto Y es arbitrario, hemos demostrado que X es marcable. □

2.2 Marcadores tipo huevo

En esta sección construimos colecciones finitas de patrones que llamamos "marcadores tipo huevo". La motivación principal es que estas colecciones pueden ser utilizadas para construir automorfismos de subshifts de manera muy explícita.

Definición 2.2.1. Sea G un grupo, $Y \subset W \Subset G$ y $X \subset A^G$ un subshift. Una colección de patrones $\mathcal{E} \subset \mathrm{L}_W(X)$ se llama un (Y, W)-**marcador tipo huevo** para X si satisface las siguientes propiedades:

1. (Y, W)**-marcador:** Existe un (Y, W)-marcador, denotado por d, tal que para todo $q \in \mathcal{E}$, se cumple que $q|_{W \setminus Y} = d$.
2. **Intercambiable a pares:** Para todo $x \in X$ y $q, q' \in \mathcal{E}$, tenemos que $x|_{G \setminus W} \vee q \in X$ si y solo si $x|_{G \setminus W} \vee q' \in X$.

Dado un conjunto $F \subset Y$ y un conjunto $\mathcal{L} \subset A^F$, decimos que $\mathcal{E}$ **realiza** $\mathcal{L}$ cuando $\mathcal{L} = \{q|_F : q \in \mathcal{E}\}$.

Dada una colección de marcadores tipo huevo $\mathcal{E}$, queremos pensar en el (Y, W)-marcador como una "clara de huevo" común, mientras que la restricción de los marcadores tipo huevo a Y son diferentes "yemas". La condición de marcador asegura que si dos de estos patrones ocurren en alguna configuración, entonces la yema de cualquiera de ellos está "protegida" por la clara de huevo, en el sentido de que no puede solaparse con el otro huevo en absoluto. La segunda condición asegura que cualquier yema puede ser retirada y reemplazada por otra sin crear patrones prohibidos. Ilustramos esto para $\mathbb{Z}^2$ en la Figura 2.2.

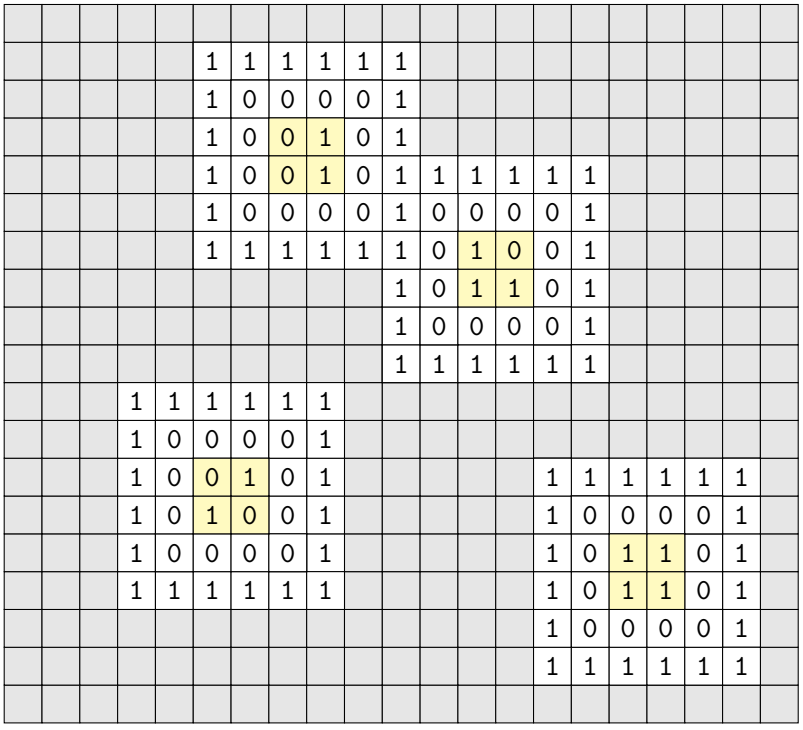


Figura 2.2: Una colección de marcadores tipo huevo en $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}^2}$.

2.2.1 Modelos tipo huevo

Sea G un grupo infinito, sea $X \subset A^G$ un subshift y $\mathcal{E}$ un (Y, W)-marcador tipo huevo. Definimos $A_{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \cup \{\star\}$ y consideramos la aplicación $\eta_{\mathcal{E}} \colon X \to (A_{\mathcal{E}})^G$ dada por

$$\eta_{\mathcal{E}}(x)(g) = \begin{cases} (g^{-1}x)|_W & \text{si } (g^{-1}x)|_W \in \mathcal{E}, \\ \star & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Decimos que $\eta_{\mathcal{E}}(X)$ es el **modelo tipo huevo** asociado al par $(X, \mathcal{E})$. Es claro que $\eta_{\mathcal{E}}(X)$ es un G-subshift (de hecho, es un factor topológico de X). El siguiente lema dice esencialmente que este factor se comporta como un G-full shift en las posiciones donde hay marcadores.

Lema 2.2.2. *Sea G un grupo infinito, sea $X \subset A^G$ un subshift y $\mathcal{E}$ un (Y, W)-marcador tipo huevo. Para $x \in X$, definimos*

$$\Delta_x = \{g \in G : (g^{-1}x)|_W \in \mathcal{E}\}.$$

Para cada aplicación $\theta \colon \Delta_x \to \mathcal{E}$, tenemos que $x_\theta \in X$, donde x_θ en $g \in G$ está dado por

$$x_\theta(g) = \begin{cases} \big(\theta(h)\big)(w) & \textit{si existe } h \in G, w \in W \textit{ tal que } g = hw \textit{ y } (h^{-1}x)|_W \in \mathcal{E}, \\ x(g) & \textit{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostración. Primero mostramos que x_θ está bien definido en A^G. Observemos que como todos los patrones en $\mathcal{E}$ coinciden en $W \setminus Y$, tenemos que

$$x_\theta(g) = \begin{cases} \big(\theta(h)\big)(w) & \text{si existe } h \in G, w \in Y \text{ tal que } g = hw \text{ y } (h^{-1}x)|_W \in \mathcal{E}, \\ x(g) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Sea $g \in G$ y supongamos que existen $h, h' \in G$, $w, w' \in Y$ con $g = hw = h'w'$ y $q, q' \in \mathcal{E}$ tales que $(h^{-1}x)|_W = q$ y $((h')^{-1}x)|_W = q'$. Si tomamos d como el marcador común para $\mathcal{E}$ con soporte en $W \setminus Y$, entonces $(h^{-1}x)|_{W\setminus Y} = d = ((h')^{-1}x)|_{W\setminus Y}$. Esto implica que $x \in h[d] \cap h'[d] \cap X$. En particular, se cumple que

$$[d] \cap h(h')^{-1}[d] \cap X = [d] \cap w'w^{-1}[d] \cap X \neq \varnothing.$$

Como d es un (Y, W)-marcador y $w'w^{-1} \in YY^{-1} \subset WY^{-1}$, se sigue que $w'w^{-1} \in \mathrm{Fix}(X)$, por lo que $h'h^{-1} \in \mathrm{Fix}(X)$. Deducimos que $q = q'$ y por lo tanto, $\big(\theta(h)\big)(w) = \big(\theta(h')\big)(w')$. Así, x_θ está bien definido.

A continuación, mostramos que $x_\theta \in X$. Notemos que para cada conjunto $F \Subset G$ tenemos que $[x_\theta|_F] \cap X \neq \varnothing$. Esto se sigue aplicando la condición de ser intercambiable a pares a x un número finito de veces (como máximo $|F|$ veces). Así, la colección de conjuntos cerrados $\{[x_\theta|_F] \cap X : F \Subset G\}$ tiene la propiedad de intersección finita, y dado que X es compacto, tiene una intersección no vacía. Una verificación directa muestra que esta intersección es igual al conjunto unitario $\{x_\theta\}$, y de este modo, hemos demostrado que $x_\theta \in X$. □

Definición 2.2.3. Un automorfismo $\varphi \in \mathrm{Aut}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$ se llama un **automorfismo tipo huevo** si

fija la posición de las estrellas. Es decir, si

$$\varphi(\eta_{\mathcal{E}}(x))(g) = \star \text{ si y solo si } \eta_{\mathcal{E}}(x)(g) = \star \text{ para todo } x \in X, g \in G.$$

Denotamos el espacio de automorfismos tipo huevo por $\mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$.

Notemos que el espacio $\mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$ de automorfismos tipo huevo es un subgrupo de $\mathrm{Aut}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$.

Lema 2.2.4. *Sea G un grupo infinito, sea $X \subset A^G$ un subshift y $\mathcal{E}$ un (Y, W)-marcador tipo huevo. Consideremos la aplicación $\Psi_{\mathcal{E}} \colon \mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X)) \to \mathrm{Aut}(X)$, donde para $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$, $x \in X$ y $g \in G$ tenemos*

$$\big(\Psi_{\mathcal{E}}(\varphi)\big)(x)(g) = \begin{cases} \big(\varphi(\eta_{\mathcal{E}}(x))(h)\big)(w) & \text{si existe } h \in G, w \in W \text{ tal que } g = hw \text{ y } (h^{-1}x)|_W \in \mathcal{E}, \\ x(g) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces, $\Psi_{\mathcal{E}}$ es un monomorfismo. En particular, $\mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$ se incrusta en $\mathrm{Aut}(X)$.

Demostración. Fijemos un automorfismo tipo huevo φ y notemos que por el Lema 2.2.2, la aplicación $\Psi_{\mathcal{E}}(\varphi) \colon X \to X$ está bien definida. Además, como φ y $\eta_{\mathcal{E}}$ son continuas, se sigue que $\Psi_{\mathcal{E}}$ es continua.

Sea $g, t \in G$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \big(\Psi_{\mathcal{E}}(\varphi)\big)(tx)(g) &= \begin{cases} \big(\varphi(\eta_{\mathcal{E}}(tx))(h)\big)(w) & \text{si } \exists h \in G, w \in W \text{ tal que } g = hw \text{ y } (h^{-1}tx)|_W \in \mathcal{E}, \\ (tx)(g) & \text{en caso contrario.} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \big(\varphi(\eta_{\mathcal{E}}(x))(h)\big)(w) & \text{si } \exists h \in G, w \in W \text{ tal que } t^{-1}g = hw \text{ y } (h^{-1}x)|_W \in \mathcal{E}, \\ x(t^{-1}g) & \text{en caso contrario.} \end{cases} \\ &= \big(\Psi_{\mathcal{E}}(\varphi)\big)(x)(t^{-1}g) \\ &= \Big(t\big(\Psi_{\mathcal{E}}(\varphi)\big)(x)\Big)(g). \end{aligned}$$

Se sigue que $\Psi_{\mathcal{E}}(\varphi)$ es G-equivariante, por lo que tenemos que $\Psi_{\mathcal{E}}(\varphi) \in \mathrm{End}(X)$. Finalmente, un cálculo directo muestra que para $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$, se cumple que $\Psi_{\mathcal{E}}(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \Psi_{\mathcal{E}}(\varphi_1) \circ \Psi_{\mathcal{E}}(\varphi_2)$, y por lo tanto, $\Psi_{\mathcal{E}}$ es un homomorfismo. En particular, $\Psi_{\mathcal{E}}(\varphi) \in \mathrm{Aut}(X)$ para todo $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$.

Finalmente, notemos que por construcción tenemos que para cada $\varphi \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$,

$$\eta_{\mathcal{E}}\big(\Psi_{\mathcal{E}}(\varphi)(x)\big) = \varphi(\eta_{\mathcal{E}}(x)).$$

De donde se sigue que $\Psi_{\mathcal{E}}$ es inyectivo. □

El Lema 2.2.4 será la herramienta principal para demostrar nuestros resultados de incrustación. Es decir, en lugar de incluir el grupo de automorfismos de un full shift directamente en $\mathrm{Aut}(X)$, lo hacemos en el espacio de los automorfismos tipo huevo, lo cual es mucho más sencillo.

Para la demostración del Teorema B, necesitaremos un tipo particular de automorfismo tipo huevo que surge de permutaciones de $\mathcal{E}$.

Corolario 2.2.5. *Sea G un grupo infinito, sea $X \subset A^G$ un subshift y $\mathcal{E}$ un (Y, W)-marcador tipo huevo. Sea $\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathcal{E})$ y consideremos la aplicación $\phi_\sigma \colon X \to X$ donde para $g \in G$ tenemos*

$$\phi_\sigma(x)(g) = \begin{cases} \Big(\sigma\big((h^{-1}x)|_W\big)\Big)(w) & \text{si existe } h \in G, w \in W \text{ tal que } g = hw \text{ y } (h^{-1}x)|_W \in \mathcal{E}, \\ x(g) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La aplicación $\phi_\sigma \in \mathrm{Aut}(X)$.

Demostración. Consideremos la aplicación $\mu \colon \eta_{\mathcal{E}}(X) \to \eta_{\mathcal{E}}(X)$, donde para $x \in X$ y $g \in G$,

$$\mu(\eta_{\mathcal{E}}(x))(g) = \begin{cases} \sigma(\eta_{\mathcal{E}}(x)(g)) & \text{si } \eta_{\mathcal{E}}(x)(g) \in \mathcal{E}, \\ \star & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Por el Lema 2.2.2, sabemos que μ está bien definida. Además, la aplicación μ es continua, G-equivariante y fija la posición de las estrellas, por lo que $\mu \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$. Por el Lema 2.2.4, sabemos que $\Psi_{\mathcal{E}}(\mu) \in \mathrm{Aut}(X)$. Un cálculo directo muestra que $\phi_\sigma = \Psi_{\mathcal{E}}(\mu)$. □

2.2.2 Existencia de marcadores tipo huevo

Definición 2.2.6. Sea G un grupo infinito. Un G-subshift X **admite marcadores tipo huevo completos** si para cada $F \Subset G$ existe una colección de marcadores tipo huevo que realiza $\mathrm{L}_F(X)$.

Lema 2.2.7. *Sea G un grupo infinito y X un G-subshift fuertemente irreducible no trivial. Entonces, X admite marcadores tipo huevo completos.*

Demostración. Fijemos $F \Subset G$. Mostraremos que X admite una colección de marcadores tipo huevo que realiza $\mathrm{L}_F(X)$. Fijemos una constante de irreducibilidad fuerte K para X. Para $T \Subset G$ y $q \in \mathrm{L}_{T \setminus FK}(X)$, consideramos el conjunto de extensiones de q a T dado por

$$\mathrm{Ext}(q) = \{p \in \mathrm{L}_{FK}(X) : p \vee q \in \mathrm{L}_T(X)\}.$$

Observamos que si $T \subset T'$, $q \in \mathrm{L}_{T \setminus FK}(X)$ y $q' \in \mathrm{L}_{T' \setminus FK}(X)$ son tales que $q \sqsubset q'$, entonces $\mathrm{Ext}(q') \subset \mathrm{Ext}(q)$, es decir, el conjunto de extensiones es monótonamente decreciente bajo extensiones de patrones. Elija algún $T_0 \Subset G$ y $q_0 \in \mathrm{L}_{T_0 \setminus FK}(X)$ tal que $\mathrm{Ext}(q_0)$ sea el mínimo en inclusión.

Por el Teorema A sabemos que X es marcable, por lo que existe un $W \Subset G$ tal que $T_0K \subsetneq W$ y existe un (T_0K, W)-marcador denotado por d.

Como X es fuertemente irreducible con constante K, existe un $x \in X$ tal que $x|_{T_0 \setminus FK} = q_0$ y $x|_{W \setminus T_0K} = d$. Definimos $p_0 = x|_{W \setminus FK}$. Por la Observación 2.1.5, se sigue que p_0 es un (FK, W)-marcador. Definimos

$$\mathcal{E} = \{q \in \mathrm{L}_W(X) : q|_{W \setminus FK} = p_0\}.$$

Tomamos $Y = FK$ y afirmamos que $\mathcal{E}$ es un conjunto de (Y, W)-marcadores tipo huevo que realiza $\mathrm{L}_F(X)$. Por construcción, es claro que para cada $q \in \mathcal{E}$ tenemos $q|_{W \setminus Y} = p_0$, que es un (Y, W)-marcador. Además, como X es fuertemente irreducible y dado que F y $W \setminus FK$ son disjuntos en K, obtenemos que $\{q|_F : q \in \mathcal{E}\} = L_F(X)$. Por lo tanto, solo necesitamos verificar que $\mathcal{E}$ es intercambiable a pares.

Fijemos $q, q' \in \mathcal{E}$ y sea $x \in X$ tal que $x|_W = q$. Fijemos $V \Subset G$ tal que $W \subset V$. Como $q_0 \sqsubset p_0 \sqsubset x|_{V \setminus FK}$ y $\mathrm{Ext}(q_0)$ es mínimo, se sigue que $\mathrm{Ext}(x|_{V \setminus FK}) = \mathrm{Ext}(p_0) = \mathrm{Ext}(q_0)$. Como $q'_{FK} \in \mathrm{Ext}(p_0)$, obtenemos que $p_V = q'_{FK} \vee x|_{V \setminus FK} \in \mathrm{L}_V(X)$.

Consideremos la colección de conjuntos cerrados dada por

$$\{[p_V] \cap X : V \Subset G \text{ y } V \supset W\}.$$

Esta colección tiene la propiedad de intersección finita, por lo que, dado que X es compacto, deducimos que tiene intersección no vacía. Sea $y \in X$ un elemento de la intersección. Por construcción, se sigue que $y|_{G \setminus FK} = x|_{G \setminus FK}$ y $y|_{FK} = q'|_{FK}$, por lo tanto $y = x_{G \setminus W} \vee q'$. □

A continuación, mostramos que bajo la suposición del TMP fuerte, podemos dar límites explícitos al tamaño relativo del soporte de los marcadores tipo huevo. Esto será crucial en la demostración del Teorema E.

Lema 2.2.8. *Sea G un grupo finitamente generado infinito, y sea X un subshift fuertemente irreducible no trivial con TMP fuerte. Entonces, para todo entero r suficientemente grande, existe una colección de $(B(2r), B(74r))$-marcadores tipo huevo para X que realiza $\mathrm{L}_{B(r)}(X)$.*

Demostración. Sea K una constante de irreducibilidad fuerte y M una constante de memoria asociada a X. Tomemos r lo suficientemente grande tal que $K \cup M \subset B(r)$, y tal que X admita un $(B(2r), B(74r))$-marcador denotado por p_r. Esto es posible por el Teorema A. Entonces definimos $\mathcal{E}_r$ como

$$\mathcal{E}_r = \{q \in \mathrm{L}_{B(74r)} : q|_{B(74r) \setminus B(2r)} = p_r\}.$$

Demostraremos que $\mathcal{E}_r$ es una colección de $(B(2r), B(74r))$-marcadores tipo huevo para X que realiza $\mathrm{L}_{B(r)}(X)$. La condición de $(B(2r), B(74r))$-marcador es evidente a partir de la definición. Dado que $K \subset B(r)$, tenemos que $B(r)K \cap (B(74r) \setminus B(2r)) = \varnothing$, de donde se sigue que para cada $p \in \mathrm{L}_{B(r)}(X)$, existe un $q \in \mathcal{E}_r$ tal que $p \sqsubset q$. Por lo tanto, $\mathcal{E}_r$ realiza $\mathrm{L}_{B(r)}(X)$.

Finalmente, mostramos que $\mathcal{E}_r$ es intercambiable a pares. Sean $q, q' \in \mathcal{E}_r$ y tomemos $x \in [q]$, $y \in [q']$. Por la definición de $\mathcal{E}_r$, tenemos que $x|_{B(74r) \setminus B(2r)} = y|_{B(74r) \setminus B(2r)}$. Dado que X tiene TMP fuerte con constante $M \subset B(r)$, se sigue que si $x, y \in X$ son tales que $x|_{B(3r) \setminus B(2r)} = y|_{B(3r) \setminus B(2r)}$, el elemento $z = y|_{B(2r)} \vee x|_{G \setminus B(2r)}$ pertenece a X. Como $x = x|_{G \setminus B(74r)} \vee q$ y $z = x|_{G \setminus B(74r)} \vee q'$, se sigue que $\mathcal{E}_r$ es intercambiable a pares. □

Finalizamos la sección estableciendo una generalización amplia del resultado de Ward [35].

Proposición 2.2.9. *Sea G un grupo infinito y sea X un G-subshift infinito que admite marcadores tipo huevo completos. Entonces, cada grupo finito se incrusta en* $\mathrm{Aut}(X)$.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ arbitrario. Como X es infinito, tenemos que $|\,\mathrm{L}_F(X)| \geq n$ para algún $F \Subset G$. Entonces, el Lema 2.2.7 muestra que existe una colección $\mathcal{E}$ de marcadores tipo huevo que realiza $\mathrm{L}_F(X)$, y el Corolario 2.2.5 muestra que $\mathrm{Sym}(\mathcal{E})$ se incrusta en $\mathrm{Aut}(X)$. Dado que $|\mathcal{E}| \geq n$, hemos demostrado que el grupo simétrico sobre n elementos se incrusta en $\mathrm{Aut}(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Como consecuencia del Lema 2.2.7 y la Proposición 2.2.9, obtenemos el siguiente resultado general.

Corolario 2.2.10. *Sea G un grupo infinito y X un G-subshift fuertemente irreducible no trivial. Entonces, cada grupo finito se incrusta en* $\mathrm{Aut}(X)$.

Capítulo 3

Teorema de Ryan generalizado

Recordemos que para $g \in G$, el shift derecho, $\tau_g(x)$ definido por $\tau_g(x)(h) = x(hg)$ es un automorfismo.

Además, notamos $Z(G) = \{x \in G : gx = xg \text{ para todo } g \in G\}$ al centro de un grupo G, y $\mathrm{Fix}(X) = \{g \in G : gx = x \text{ para todo } x \in X\}$ al estabilizador puntual. Observemos que $\mathrm{Fix}(X)$ es un subgrupo normal de G y que $G/\mathrm{Fix}(X)$ actúa fielmente sobre X. Para $\gamma \in G/\mathrm{Fix}(X)$ y $x \in X$ escribiremos γx para denotar la acción hx de cualquier $h \in G$ que pertenezca a la clase lateral $\gamma = h\,\mathrm{Fix}(X)$.

Proposición 3.0.1. *Sea G un grupo infinito y sea $X \subset A^G$ un subshift no vacío que admite marcadores tipo huevo completos. Entonces $Z(\mathrm{Aut}(X))$ es igual a $\langle \tau_g : g\,\mathrm{Fix}(X) \in Z(G/\mathrm{Fix}(X))\rangle$ y es isomorfo a $Z(G/\mathrm{Fix}(X))$.*

Demostración. Por la Proposición 1.3.7 basta probar que todo elemento en $Z(\mathrm{Aut}(X))$ es igual a τ_g para algún $g \in G$ con $g\,\mathrm{Fix}(X) \in Z(G/\mathrm{Fix}(X))$. Si $|X| = 1$ el resultado es trivial. Si $|X| = 2$, entonces X consiste o bien en una órbita de tamaño dos, en cuyo caso la conclusión se cumple, o bien en dos puntos fijos, en cuyo caso X no admite marcadores tipo huevo completos. A continuación asumiremos que $|X| \geq 3$.

Sea $\varphi \in Z(\mathrm{Aut}(X))$. Por el teorema CHL (Teorema 1.3.1) existe $F \Subset G$ y una aplicación local $\Phi\colon A^F \to A$ tal que $\varphi(x)(g) = \Phi((g^{-1}x)|_F)$ para todo $x \in X$ y $g \in G$. Aumentamos el conjunto F si es necesario para asegurar que $|\,\mathrm{L}_F(X)| \geq 3$, y tomamos una colección $\mathcal{E}$ de (Y, W)-marcadores tipo huevo que realiza $\mathrm{L}_F(X)$. Sin pérdida de generalidad asumimos que Y es simétrico.

Por el Corolario 2.2.5 se deduce que para cada $\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathcal{E})$ la aplicación ϕ_σ que intercambia patrones de $\mathcal{E}$ según σ es un automorfismo bien definido de X.

Primero afirmamos que para cada $q \in \mathcal{E}$, existe $g \in Y$ tal que $(g\varphi(x))|_W \in \mathcal{E}$ para cada $x \in [q] \cap X$. Por contradicción, supongamos que esta propiedad no se cumple para algún $q \in \mathcal{E}$ y $x \in X$. Tenemos que para cada $\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathcal{E})$ tenemos

$$\big(\phi_\sigma \circ \varphi(x)\big)(\mathbf{1}_G) = \varphi(x)(\mathbf{1}_G).$$

Esto es simplemente por definición de ϕ_σ. Por otro lado, elegimos σ como la transposición que

intercambia q con algún $q' \in \mathcal{E}$ arbitrario, así

$$\big(\varphi \circ \phi_\sigma(x)\big)(\mathbf{1}_G) = \Phi(q'|_F).$$

Dado que $\varphi \in Z(\mathrm{Aut}(X))$, tenemos $\varphi \circ \phi_\sigma(x) = \phi_\sigma \circ \varphi(x)$ y así $\Phi(q'|_F) = \varphi(x)(\mathbf{1}_G)$ para cada $q' \in \mathcal{E}$. Esto implica que $\Phi|_{L_F(X)}$ es constante: $q' \in \mathcal{E}$ es arbitrario, y como $\mathcal{E}$ es un marcador tipo huevo completo, cada elemento en $\mathrm{L}_F(X)$ surge como la restricción de algún elemento de $\mathcal{E}$ a F. Esto implica que φ también es una función constante, y como es un automorfismo, esto solo puede ocurrir si $|X| = 1$. Esto contradice nuestra suposición de que $|X| \geq 3$. Luego, $(g\varphi(x))|_W \in \mathcal{E}$ con las condiciones descritas al inicio del párrafo.

Ahora que la primera afirmación está resuelta, observamos que lo siguiente se cumple para cada $q \in \mathcal{E}$: si existen $g, g' \in Y$ y $p, p' \in \mathcal{E}$ tales que para cada $x \in [q] \cap X$ tenemos $(g\varphi(x)) \in [p] \cap X$ y $(g'\varphi(x)) \in [p'] \cap X$, entonces necesariamente $g'g^{-1} \in \mathrm{Fix}(X)$ y $p = p'$. De esta manera, si tomamos $(g\varphi(x)) \in [p]$ y $(g'\varphi(x)) \in [p']$ implica que $d = p|_{W \setminus Y}$ es $(g'g^{-1})$-superpuesto. Como d es un (Y, W)-marcador y $g'g^{-1} \in YY^{-1} \subset WY^{-1}$, se sigue que $g'g^{-1} \in \mathrm{Fix}(X)$. Dado que $g'g^{-1}$ actúa trivialmente, tenemos $g\varphi(x) = g'\varphi(x)$, y uniendo esto con nuestra primera suposición que $(g\varphi(x)) \in [p]$ y $(g'\varphi(x)) \in [p']$, obtenemos que $p = p'$.

De la observación anterior, se sigue que existen aplicaciones $s\colon \mathcal{E} \to G/\mathrm{Fix}(X)$ y $\pi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ tales que para cada $x \in [q]$ tenemos $s(q)\varphi(x) \in [\pi(q)]$ y $s(q)$ está representado por algún elemento en Y.

Afirmamos ahora que π es la aplicación identidad. Primero, es claro que π es una permutación: los mismos argumentos anteriores se pueden aplicar a φ^{-1} y la aplicación asociada debe necesariamente ser π^{-1}. Fijemos $\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathcal{E})$, $q \in \mathcal{E}$ y sea $x \in [q]$. Observamos que el único patrón de $\mathcal{E}$ que aparece en $\phi_\sigma \circ \varphi(x)$ en Y es $\sigma(\pi(q))$, mientras que el único patrón de $\mathcal{E}$ que aparece en $\varphi(x) \circ \phi_\sigma$ en Y es $\pi(\sigma(q))$. Como $\phi_\sigma \circ \varphi = \varphi \circ \phi_\sigma$, concluimos que $\sigma \circ \pi = \pi \circ \sigma$, y así, como σ es arbitrario, obtenemos que $\pi \in Z(\mathrm{Sym}(\mathcal{E}))$. Recordemos que el centro del grupo simétrico sobre n elementos contiene solo la permutación trivial para $n \geq 3$ y dado que $|\mathcal{E}| \geq 3$, se sigue que $\pi = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ como se afirmó.

Ahora argumentamos que s es una aplicación constante. Sean $p, q \in \mathcal{E}$ con $p \neq q$ y sea σ la transposición que los intercambia. Existen $g, h \in G$ tales que $g, h \in Y$, g representa $s(p)$ y h representa $s(q)$ en el cociente $G/\mathrm{Fix}(X)$. Ahora, para cualquier $x \in [p]$ tenemos que $g\phi_\sigma(\varphi(x)) \in [q]$ y $h\varphi(\phi_\sigma(x)) \in [q]$. Se sigue que q es (gh^{-1})-superpuesto, y así $d = q|_{W \setminus Y}$ también es (gh^{-1})-superpuesto (ver Observación 2.1.8). Como d es un (Y, W)-marcador y $gh^{-1} \in WY^{-1}$, se sigue que $gh^{-1} \in \mathrm{Fix}(X)$. Esto prueba que $s(q) = s(p)$.

Sea $g \in G$ un representante del valor tomado por la aplicación constante s. Así, para cada $q \in \mathcal{E}$ y $x \in [q]$, tenemos $g\varphi(x) \in [q]$. Como φ solo depende localmente de F y $\{q|_F : q \in \mathcal{E}\} = L_F(X)$, se sigue que $g\varphi(x) = x$ para cada $x \in X$ y así $\varphi(x) = g^{-1}x$ para cada $x \in X$. Esta aplicación solo puede ser un automorfismo cuando $g\,\mathrm{Fix}(X) \in Z(G/\mathrm{Fix}(X))$ y en tal caso coincide con τ_g.

□

Nota 3.0.2. La demostración anterior es una adaptación y generalización de la prueba original dada por Ryan, [29].

Ahora estamos listos para probar el Teorema B.

Teorema 3.0.3. *(Teorema B) Sea G un grupo infinito y X un G-subshift no vacío fuertemente irreducible. Entonces $Z(\mathrm{Aut}(X))$ está generado por shifts por elementos $g \in G$ con $g\,\mathrm{Fix}(X) \in Z(G/\mathrm{Fix}(X))$. En particular*

$$Z(\mathrm{Aut}(X)) \cong Z\left({}^{G}/_{\mathrm{Fix}(X)}\right).$$

Demostración del Teorema B. Sea G un grupo infinito y sea X un G-subshift no vacío fuertemente irreducible. El lema 2.2.7 implica que X admite marcadores tipo huevo completos, luego el resultado se sigue de la Proposición 3.0.1. □

Terminamos esta sección mostrando que el teorema de Ryan no puede extenderse a grupos finitos manteniendo la afirmación tal como está.

Ejemplo 3.0.4. Sea G un grupo finito. Consideremos el subshift $X \subset \{0,1\}^G$ dado por

$$X = \{0^G, 1^G\} \cup \{x \in \{0,1\}^G : |x^{-1}(1)| = 1\}.$$

En otras palabras, X contiene las dos configuraciones uniformes y todas las configuraciones con un único 1. Notemos que en un grupo finito, todo subshift es de tipo finito y fuertemente irreducible (con $K = G$).

No es difícil ver que $\mathrm{Aut}(X)$ está generado por los shifts derechos τ_g con $g \in G$ y la involución que intercambia 0^G y 1^G. De esto, se sigue que $\mathrm{Aut}(X) \cong G \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ y, por lo tanto, $Z(\mathrm{Aut}(X)) \cong Z(G) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

3.1 Aplicaciones del teorema de Ryan

Una consecuencia inmediata del Teorema B es la siguiente:

Corolario 3.1.1. *Sean G, H dos grupos infinitos y sean $X \subset A^G$ y $Y \subset B^H$ subshifts fieles y fuertemente irreducibles. Si $\mathrm{Aut}(X) \cong \mathrm{Aut}(Y)$, entonces $Z(G) \cong Z(H)$. En particular, si $\min(|A|, |B|) \geq 2$ y $\mathrm{Aut}(A^G) \cong \mathrm{Aut}(B^H)$, entonces $Z(G) \cong Z(H)$.*

Esto responde a una pregunta de Hochman [17], a saber, si m, n son dos enteros positivos distintos, entonces $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}^m})$ y $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}^n})$ no son isomorfos.

La aplicación más famosa del teorema de Ryan es una técnica para mostrar que dos $\mathbb{Z}$- full shifts, tal que el tamaño de los alfabetos satisface una relación algebraica, no son isomorfos. El siguiente ejemplo, ampliamente conocido, fue presentado por Boyle, Lind y Rudolph en [5] en 1988. Lo incluimos aquí a modo de introducción, pues nos permite comprender el concepto de *shift lento en k pasos*, necesario para la demostración del Teorema C.

Ejemplo 3.1.2. $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$ y $\mathrm{Aut}(\{0,1,2,3\}^{\mathbb{Z}})$ no son isomorfos.

La idea fundamental de este ejemplo es probar que existe $\varphi \in \mathrm{Aut}(\{0,1,2,3\}^{\mathbb{Z}})$ tal que $\varphi^2 = \tau_1$, una 2-raíz del shift, nos referimos a ella como "shift lento en dos pasos" y, por el contrario, no es posible encontrar una 2-raíz en $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$.

Afirmación 1. Existe $\varphi \in \mathrm{Aut}(\{0,1,2,3\}^{\mathbb{Z}})$ tal que $\varphi^2 = \tau_1$.

Demostración de la afirmación. Sean los alfabetos $A = \{0,1,2,3\}$ y $\overline{\mathrm{A}} = \{0,1\}^2$, usamos la siguiente identificación $\{A \iff \overline{\mathrm{A}}\} = \left\{0 \iff \binom{0}{0}, 1 \iff \binom{0}{1}, 2 \iff \binom{1}{0}, 3 \iff \binom{1}{1}\right\}$. Así, para $x \in A^{\mathbb{Z}}$, existe una configuración $\overline{x} \in \overline{\mathrm{A}}^{\mathbb{Z}}$ tal que

$$x = \cdots 02{,}31 \cdots \iff \overline{x} = \cdots \binom{0}{0}\binom{1}{0}, \binom{1}{1}\binom{0}{1} \cdots$$

A partir de esta identificación, construimos $\varphi \in \mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ de la siguiente manera, teniendo en cuenta que $\varphi(x) \longleftrightarrow \varphi(\overline{x})$

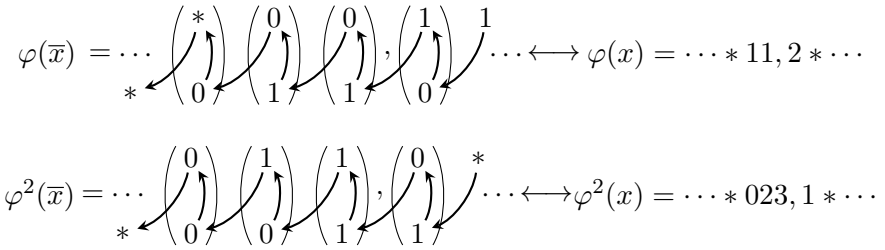


Figura 3.1: Shift lento en 2 pasos con $g = 1$.

A partir de la Figura 3.1, podemos observar que φ definido de esta manera satisface ser una 2-raíz del shift derecho, es decir, $\varphi^2 = \tau_1$. □

Afirmación 2. No existe $\varphi \in \mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$ tal que $\varphi^2 = \tau_1$.

Demostración de la afirmación: Por contradicción. Supongamos que existe $\varphi \in \mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$ tal que $\varphi^2 = \tau_1$. Sean $x_1 = \cdots 01, 01 \cdots$ y $x_2 = \cdots 10, 10 \cdots$ las únicas configuraciones de $A^{\mathbb{Z}}$ con órbita bajo τ_1 de longitud exactamente 2. Como φ es un automorfismo, debe preservar la longitud de la órbita y además $x_i = \tau_1^2(x_i) = (\varphi^2)^2(x_i) = \varphi^{2\cdot 2}(x_i)$ con $i = 1, 2$. Así $\varphi^4(x_i) = x_i$ y $\varphi^2(x_i) = \tau(x_i) \neq x_i$ para $i = 1, 2$. De esta manera, la longitud de la órbita de x_i bajo φ debe dividir la cantidad de configuraciones de orden 2. Luego,

$$2 \cdot 2 \mid 2, \tag{3.1}$$

lo cual es una contradicción. De esta manera, concluimos que para $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$ no es posible construir una 2-raíz de τ_1. □

Nota 3.1.3. La afirmación 2 se puede generalizar para raíces k-ésimas. Notando que la cantidad de configuraciones no cambia, pero el tamaño de la órbita sí. Es decir, sea $x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ una configuración de orden exactamente 2, con lo que $x = \tau_1^2(x) = \varphi^{2\cdot k}(x)$. Así, siguiendo la Ecuación (3.1) tenemos

$$2 \cdot k \mid 2 \Longrightarrow k \mid 1.$$

Lo cual es una contradicción, pues $k > 1$. De esta manera, no existe $\varphi \in \mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$ tal que $\varphi^k = \tau_1$ para ningún $k > 1$.

Usando esta técnica del "shift lento en n pasos", podemos distinguir $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$ y $\mathrm{Aut}((\{0,1\}^n)^{\mathbb{Z}})$ para $n \in \mathbb{Z}_{>1}$. En [15, Theorem 2.5], Hartman, Kra y Schmieding hacen una generalización de este resultado usando *representación dimensional* como técnica, o por su nombre en inglés *dimension representation*.

Generalizamos este resultado a una clase amplia de grupos.

Teorema 3.1.4 (Teorema C)**.** *Sea G un grupo infinito y supongamos que existe un epimorfismo $\psi\colon G \to \mathbb{Z}$ tal que $\psi(Z(G)) = \mathbb{Z}$. Para todo entero $n \geq 2$ y enteros positivos k, ℓ, se tiene*

$$\mathrm{Aut}(\{1,\dots,n^k\}^G) \cong \mathrm{Aut}(\{1,\dots,n^\ell\}^G) \text{ si y solo si } k = \ell.$$

Como en el caso clásico de $\mathbb{Z}$, Ejemplo 3.1.2, la demostración del Teorema C se basa en entender las posibles raíces de elementos en el centro del grupo de automorfismos. Como de costumbre, para $g \in Z(G)$ definimos $\tau_g \in \mathrm{Aut}(X)$ como el shift derecho por g. Sea G un grupo y $X \subset A^G$ un subshift. Definimos

$$\mathcal{R}(X) = \{k \geq 1 : \text{ para todo } g \in Z(G) \text{ existe } \phi \in \mathrm{Aut}(X) \text{ tal que } \phi^k = \tau_g\}.$$

Por Teorema B, sea G infinito y sea X un subshift fiel y fuertemente irreducible no trivial, entonces $\mathcal{R}(X)$ es el conjunto de todos los índices comunes posibles de raíces de $Z(\mathrm{Aut}(X))$. Si X y Y son dos subshifts, como en las hipótesis del Teorema B, y $\mathrm{Aut}(X)$ es isomorfo con $\mathrm{Aut}(Y)$, entonces por Corolario 3.1.1 tenemos $\mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(Y)$.

Primero mostramos que si $|A| = n^k$ para algún $n \geq 2$ y $k \geq 1$, entonces $k \in \mathcal{R}(A^G)$. Esta prueba es muy similar al argumento clásico en $G = \mathbb{Z}$.

Lema 3.1.5. *Sea G un grupo infinito y A un alfabeto de tamaño $|A| = n^k$, para algunos enteros $n \geq 2$ y $k \geq 1$. Entonces $k \in \mathcal{R}(A^G)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos interpretar el alfabeto A como pares ordenados de la forma

$$A = \{(a_1,\dots,a_k) : a_i \in \{1,\dots,n\} \text{ para todo } i \in \{1,\dots,k\}\}.$$

Sea $h \in Z(G)$. Consideremos el **shift lento en k pasos** $\varphi_h\colon A^G \to A^G$ dado por

$$(\varphi_h(x)(g))_i = \begin{cases} x(gh)_k & \text{si } i = 1 \\ x(g)_{i-1} & \text{si } 1 < i \leq k \end{cases} \quad \text{para todo } g \in G.$$

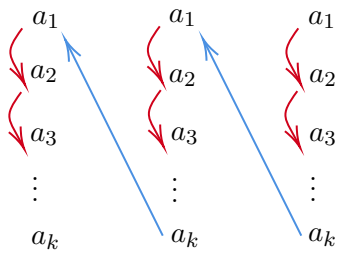


Figura 3.2: Aplicación φ_h

Claramente, φ_h es continua y G-equivariante. Además, para cada $g \in G$ se tiene $\left(\varphi_h^k(x)(g)\right)_i = x(gh)_i$, por lo que se sigue que $\varphi_h^k = \tau_h$. De aquí deducimos que $\varphi_h \in \mathrm{Aut}(A^G)$. Finalmente, como $h \in Z(G)$ es arbitrario, concluimos que $k \in \mathcal{R}(A^G)$. □

La demostración restante es una generalización del argumento de [25, Theorem 8] y se basa en el resultado fundamental de Lind, que caracteriza las entropías topológicas de los $\mathbb{Z}$-SFTs mezcladores como la clase de logaritmos de números de Perron. Recordemos que un número real $\alpha > 1$ se llama **Perron** si es un entero algebraico que es estrictamente mayor que la norma de sus conjugados algebraicos. El nombre proviene del hecho de que, como consecuencia del teorema de Perron-Frobenius, estos números son precisamente el conjunto de valores que aparecen como el mayor valor propio de una matriz primitiva no negativa de entradas enteras. Para más información sobre la teoría de la entropía y los números de Perron, podemos remitirnos al siguiente libro [24].

Además del resultado de Lind, solo necesitaremos tres hechos básicos sobre la teoría de la entropía para acciones de $\mathbb{Z}$. Sea X un espacio compacto metrizable y un homeomorfismo $T\colon X \to X$, denotamos por $h_{\mathrm{top}}(T)$ su entropía topológica.

1. Sea $\sigma\colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ el operador del shift dado por $\sigma(x)(n) = x(n-1)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $x \in A^{\mathbb{Z}}$. La entropía topológica del operador del shift está dada por $h_{\mathrm{top}}(\sigma) = \log(|A|)$.
2. La entropía topológica es un invariante de conjugación topológica.
3. Para todo $n \geq 1$ se tiene que $h_{\mathrm{top}}(T^n) = n \cdot h_{\mathrm{top}}(T)$.

Lema 3.1.6. *Sea G un grupo infinito y supongamos que existe un epimorfismo $\psi\colon G \to \mathbb{Z}$ tal que $\psi(Z(G)) = \mathbb{Z}$. Se tiene que $k \in \mathcal{R}(A^G)$ si y solo si $|A|$ es una potencia k-ésima.*

Demostración. Fijemos un entero positivo k. Si $|A|$ es una potencia k-ésima, entonces $k \in \mathcal{R}(A^G)$ por el Lema 3.1.5. Recíprocamente, sea $\psi\colon G \to \mathbb{Z}$ un epimorfismo tal que $\psi(Z(G)) = \mathbb{Z}$ y fijemos $g \in Z(G)$ tal que $\psi(g) = 1$. Por nuestra suposición, $k \in \mathcal{R}(A^G)$ y, por lo tanto, existe $\phi \in \mathrm{Aut}(A^G)$ tal que $\phi^k = \tau_g$.

Observemos que tenemos un homeomorfismo ξ de $A^{\mathbb{Z}}$ en el conjunto de las configuraciones $y \in A^G$ que son estabilizadas por $\ker(\psi)$. Más precisamente, este homeomorfismo está dado por

$$\xi(x)(h) = x(\psi(h)) \text{ para todo } h \in G.$$

Consideremos el automorfismo de $A^{\mathbb{Z}}$ dado por $T = \xi^{-1} \circ \phi \circ \xi$. Se tiene que

$$T^k = \xi^{-1} \circ \phi^k \circ \xi = \xi^{-1} \circ \tau_g \circ \xi = \sigma.$$

De donde deducimos que $h_{\text{top}}(T) = \frac{1}{k} \log(|A|)$.

Sea $\iota_k \colon A^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ dada por $\iota_k(x)(n) = x(kn)$. Definimos $X \subset A^{\mathbb{Z}}$ como

$$X = \{x \in A^{\mathbb{Z}} : \iota_k(\sigma^{n+1}(x)) = T(\iota_k(\sigma^n(x))) \text{ para todo } n \in \{0, \dots, k-1\}\}.$$

Como $T^k = \sigma$, se sigue que la propiedad que define X se cumple para todo $n \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto X es un conjunto cerrado e invariante bajo $\mathbb{Z}$. Además, por el teorema CHL (Teorema 1.3.1) aplicado a T, se sigue que X es un $\mathbb{Z}$-SFT. También es inmediato, a partir de $T^k = \sigma$, que X es mezclador.

Finalmente, la aplicación $\gamma \colon A^{\mathbb{Z}} \to X$ dada por $\gamma(x)_k = T^{k \bmod n}(x)(\lfloor \frac{k}{n} \rfloor)$ es una conjugación topológica entre $(A^{\mathbb{Z}}, T)$ y (X, σ). De donde se sigue que $(A^{\mathbb{Z}}, T)$ es topológicamente conjugado a un $\mathbb{Z}$-SFT mezclador. Como $h_{\text{top}}(T) = \frac{1}{k} \log(|A|)$, se sigue por el resultado de Lind que $|A|^{\frac{1}{k}}$ debe ser un número de Perron, y esto solo puede ocurrir si $|A|$ es una potencia k-ésima de algún entero (de lo contrario, el polinomio mínimo tiene más de una raíz y todas tienen el mismo módulo). □

Demostración del Teorema C. Si $k = \ell$, claramente $\text{Aut}(\{1, \dots, n^k\}^G) \cong \text{Aut}(\{1, \dots, n^\ell\}^G)$.

Para la inversa, si $\text{Aut}(\{1, \dots, n^k\}^G) \cong \text{Aut}(\{1, \dots, n^\ell\}^G)$, entonces $Z(\text{Aut}(\{1, \dots, n^k\}^G)) \cong Z(\text{Aut}(\{1, \dots, n^\ell\}^G))$, y por el Teorema B, ambos son isomorfos a $Z(G)$. Así, podemos deducir que $\mathcal{R}(\{1, \dots, n^k\}^G) = \mathcal{R}(\{1, \dots, n^\ell\}^G)$.

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $k \geq \ell$. Sea $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ la descomposición en factores primos de n, y observamos que n es una potencia i-ésima si y solo si i divide a d, con $d = \gcd(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$.

Definimos $m = n^{\frac{1}{d}}$. Se sigue que $m \geq 2$ y que m no es la i-ésima potencia de ningún número entero positivo para todo $i \geq 2$, porque los exponentes que quedan después de dividir por d no tienen ningún divisor en común. Por el Lema 3.1.6, deducimos que $m^{d\ell} = n^\ell$ es una potencia dk-ésima. Esto implica que m^ℓ es una potencia k-ésima. Se sigue que k divide $(\alpha_i/d)\ell$ para cada $i = 1, \dots, r$, y dado que $\alpha_1/d, \dots, \alpha_r/d$ son coprimos, esto implica que k divide $l = \gcd((\alpha_1/d)\ell, \dots, (\alpha_r/d)\ell)$. Así que $k = l$. □

Como lo demuestran los resultados de Hochman [18], nuestra versión del teorema de Ryan, Teorema B, no cubre todos los casos en los que se cumple la conclusión. Así, una pregunta natural es

Pregunta 3.1.7. ¿Se pueden debilitar significativamente las hipótesis de irreducibilidad fuerte en el Teorema B?

Una pregunta más específica es si la misma conclusión se mantiene para SFTs transitivos con entropía positiva en grupos promediables (ver [18, Theorem 1.2]).

También existe en la literatura una versión finitaria del teorema de Ryan, dada por Salo [31] (ver también [20]), que establece la existencia de un conjunto finito F de automorfismos de $\{0,1,2,3\}^{\mathbb{Z}}$ tal que si $\varphi \in \{0,1,2,3\}^{\mathbb{Z}}$ conmuta con cada elemento de F, entonces φ es una potencia del shift. No sabemos si resultados similares se pueden establecer para grupos arbitrarios

Pregunta 3.1.8. ¿Se puede establecer una versión finitaria del teorema de Ryan para acciones de grupos infinitos?

La anterior pregunta fue resuelta afirmativamente para grupos finitamente generados e infinitos, en un trabajo reciente de Salo y Schmieding [34].

Capítulo 4

Incrustaciones

El objetivo general de esta sección es estudiar cuándo dos grupos de automorfismos se incrustan uno en el otro. Hacemos la siguiente observación elemental que se sigue del teorema CHL, Teorema 1.3.1.

Observación 4.0.1. Si G, H son grupos y H se incrusta en G, entonces para cada alfabeto A tenemos que $\mathrm{Aut}(A^H)$ se incrusta en $\mathrm{Aut}(A^G)$.

Nuestro foco estará centrado en el caso donde H no se incrusta en G o A^G es reemplazado por un subshift más general. Iniciaremos probando un resultado preliminar que nos permitirá dar una noción de intuición a la técnica de la **cinta transportadora**, la cual será crucial en las demostraciones del caso general, Teorema E.

Proposición 4.0.2. *Sea G un grupo no localmente finito y sea $S \Subset G$ un conjunto simétrico tal que $\langle S \rangle$ es infinito. Para cada par de alfabetos A, B con $|B| \geq |A|^2|S|^2$, se tiene que* $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ *se incrusta en* $\mathrm{Aut}(B^G)$.

Demostración. Escogemos $B_0 \subset B$ con $|B_0| = |A|^2|S|^2$ y fijamos una biyección $\Phi\colon B_0 \to S^2 \times A^2$. Para $c \in B_0$ con $\Phi(c) = (s, t, a, b)$, escribimos $\mathfrak{b}(c) = s$, $\mathfrak{f}(c) = t$, $\top(c) = a$, $\bot(c) = b$. Las dos primeras coordenadas representan punteros hacia atrás y hacia adelante, respectivamente, mientras que las dos últimas coordenadas representan símbolos en una "pista superior" y una "pista inferior" de la cinta, respectivamente.

Dado $x \in X$ y $g \in G$, decimos que x en g es:

1. **Consistente hacia adelante**, si $x(g) \in B_0$, $x(g\mathfrak{f}(x(g))) \in B_0$ y además,
$$\mathfrak{f}(x(g))^{-1} = \mathfrak{b}(x(g\mathfrak{f}(x(g)))).$$
2. **Consistente hacia atrás**, si $x(g) \in B_0$, $x(g\mathfrak{b}(x(g))) \in B_0$ y además,
$$\mathfrak{b}(x(g))^{-1} = \mathfrak{f}(x(g\mathfrak{b}(x(g)))).$$

Si las condiciones de consistencia se cumplen, tenemos que seguir un puntero hacia adelante y luego hacia atrás en el nuevo elemento (o viceversa) no implica ningún movimiento neto. Ilustramos esto en la Figura 4.1.

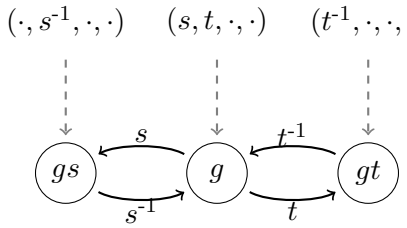


Figura 4.1: Una porción de una configuración que es consistente hacia adelante y hacia atrás en g. La fila inferior representa los elementos g, gt y gs en G, y la fila superior los símbolos en esas posiciones.

Para $x \in X$, definimos la aplicación **cinta transportadora** $f_x \in \mathrm{Sym}(G \times \{\top, \bot\})$ de la siguiente manera. Para $g \in G$, definimos:

$$f_x(g, \top) = \begin{cases} (g\mathfrak{f}(x(g)), \top) & \text{si } x \text{ en } g \text{ es consistente hacia adelante.} \\ (g, \bot) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

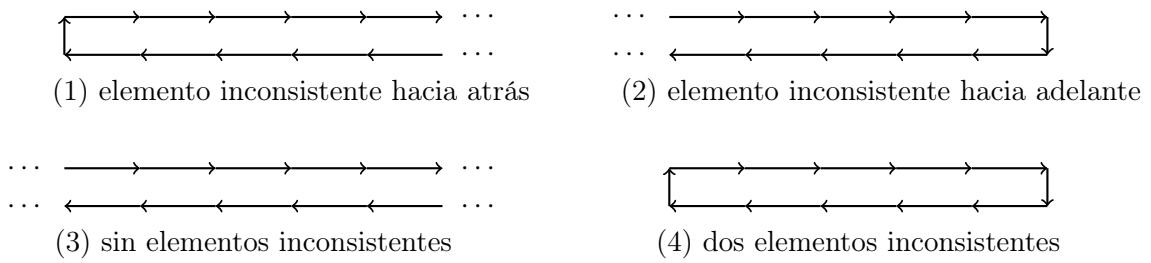
$$f_x(g, \bot) = \begin{cases} (g\mathfrak{b}(x(g)), \bot) & \text{si } x \text{ en } g \text{ es consistente hacia atrás.} \\ (g, \top) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Observamos que f_x es efectivamente una función biyectiva, y su inversa está dada por:

$$f_x^{-1}(g, \top) = \begin{cases} (g\mathfrak{b}(x(g)), \top) & \text{si } x \text{ en } g \text{ es consistente hacia atrás.} \\ (g, \bot) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

$$f_x^{-1}(g, \bot) = \begin{cases} (g\mathfrak{f}(x(g)), \bot) & \text{si } x \text{ en } g \text{ es consistente hacia adelante.} \\ (g, \top) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Intuitivamente, si pensamos en $G \times \{\top, \bot\}$ como una "pista superior" y una "pista inferior" de G, entonces la acción de $\mathbb{Z}$ inducida por f_x particiona $G \times \{\top, \bot\}$ en ciclos o caminos bi-infinitos. Estas posibilidades se ilustran en la Figura 4.2.



(1) elemento inconsistente hacia atrás (2) elemento inconsistente hacia adelante

(3) sin elementos inconsistentes (4) dos elementos inconsistentes

Figura 4.2: Tipos de caminos según f_x.

A continuación, utilizamos la acción $\mathbb{Z} \overset{f_x}{\curvearrowright} G \times \{\top, \bot\}$ para inducir configuraciones en $A^{\mathbb{Z}}$ leyendo

los símbolos de las pistas superior e inferior siguiendo f_x. Específicamente, dado $x \in B^G$ y $g \in G$ tal que $x(g) \in B_0$, definimos $c[x, g, \top]$ y $c[x, g, \bot] \in A^{\mathbb{Z}}$, los cuales están dados en $k \in \mathbb{Z}$ por

$$c[x, g, \top](k) = \begin{cases} \top(x(h)) & \text{si } f_x^k(g, \top) = (h, \top), \\ \bot(x(h)) & \text{si } f_x^k(g, \top) = (h, \bot), \end{cases}$$

$$c[x, g, \bot](k) = \begin{cases} \top(x(h)) & \text{si } f_x^k(g, \bot) = (h, \top), \\ \bot(x(h)) & \text{si } f_x^k(g, \bot) = (h, \bot). \end{cases}$$

Observamos que para cada $g, h \in G$, $x \in X$ y $t \in \{\top, \bot\}$ tal que $x(h^{-1}g) \in B_0$, se cumple la relación:

$$c[hx, g, t] = c[x, h^{-1}g, t].$$

Finalmente, definimos $\psi\colon \operatorname{Aut}(A^{\mathbb{Z}}) \to \operatorname{Aut}(B^G)$. Para $\varphi \in \operatorname{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$, $x \in B^G$ y $g \in G$, definimos

$$\big(\psi(\varphi)(x)\big)(g) = \begin{cases} \Phi^{-1}\big(\mathfrak{b}(x(g)), \mathfrak{f}(x(g)), \varphi(c[x, g, \top])(0), \varphi(c[x, g, \bot])(0)\big) & \text{si } x(g) \in B_0, \\ x(g) & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

En palabras más simples, $\psi(\varphi)$ es la transformación en B^G que no altera los símbolos en $B \setminus B_0$ y, para los símbolos en B_0, conserva las coordenadas de los punteros y actualiza las coordenadas de los símbolos como si aplicara φ en las copias de $\mathbb{Z}$ inducidas por los punteros.

De la definición se sigue que para cada $\varphi \in \operatorname{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$, $x \in B^G$, $g \in G$ y $t \in \{\top, \bot\}$ tal que $x(g) \in B_0$, se cumple

$$\varphi(c[x, g, t]) = c[\psi(\varphi)(x), g, t].$$

Por lo tanto, para todo $\varphi_1, \varphi_2 \in \operatorname{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$, se tiene que $\psi(\varphi_1 \circ \varphi_2) = \psi(\varphi_1) \circ \psi(\varphi_2)$.

El hecho de que $\psi(\varphi)$ sea continua es claro, ya que φ es continua. La G-equivarianza de $\psi(\varphi)$ se sigue directamente de la relación $c[hx, g, t] = c[x, h^{-1}g, t]$, por lo que $\psi(\varphi) \in \operatorname{End}(B^G)$. Además, como $\psi(\varphi^{-1}) = (\psi(\varphi))^{-1}$, deducimos que $\psi(\varphi) \in \operatorname{Aut}(B^G)$. De este modo, $\psi\colon \operatorname{Aut}(A^{\mathbb{Z}}) \to \operatorname{Aut}(B^G)$ es un homomorfismo.

Solo queda demostrar que ψ es inyectiva. Como el subgrupo generado por S es infinito, existe una sucesión bi-infinita $(g_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ en G de elementos distintos, con la propiedad de que $g_i^{-1} g_{i+1} \in S$ para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Si φ_1, φ_2 son automorfismos distintos en $\operatorname{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$, entonces existe $z \in A^{\mathbb{Z}}$ tal que $\varphi_1(z)(0) \neq \varphi_2(z)(0)$. Fijamos algunos $a_0 \in A, b_0 \in B$ y definimos $\hat{x} \in B^G$ como

$$\hat{x}(g) = \begin{cases} \Phi^{-1}(g_i^{-1}g_{i-1}, g_i^{-1}g_{i+1}, z(i), a_0) & \text{si } g = g_i \text{ para algún } i \in \mathbb{Z}, \\ b_0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Es claro que $c[\hat{x}, g_0, \top] = z$. De la definición de ψ se sigue que $\big(\psi(\varphi_1)(x)\big)(g_0) \neq \big(\psi(\varphi_2)(x)\big)(g_0)$, y por lo tanto, $\psi(\varphi_1) \neq \psi(\varphi_2)$. □

4.1 Incrustaciones en $\mathrm{Aut}(X)$ caso F_2 como subgrupo

Para $k \geq 1$, denotamos por F_k el grupo libre con generadores $\{a_1, \ldots, a_k\}$. Antes de demostrar el Teorema D, mostramos un lema elemental.

Lema 4.1.1. *Sea G un grupo y supongamos que F_k se incrusta en G para algún $k \geq 1$. Para todo $T \Subset G$, existen $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in G$ tales que $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_k \rangle \cong F_k$ y la colección $\{wT\}_{w \in \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_k \rangle}$ es disjunta dos a dos.*

Demostración. Fijemos $T \Subset G$ y sea $\psi \colon F_k \to G$ un homomorfismo inyectivo. Como ψ es inyectivo, hay a lo sumo $|TT^{-1}|$ elementos u de F_k tales que $T \cap \psi(u)T \neq \varnothing$.

Consideremos la métrica de palabras $|\cdot|$ en F_k con respecto al conjunto generador canónico $\{a_1, \ldots, a_k\}$ y definamos $n_0 = 1 + \max\{|u| : u \in F_k \text{ y } T \cap \psi(u)T \neq \varnothing\}$. Para $i \in \{1, \ldots, k\}$, tomamos $\gamma_i = \psi(a_i^{n_0})$. Claramente, $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ generan una copia isomorfa de F_k en G.

Sea $w, w' \in \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_k \rangle$ y supongamos que $wT \cap w'T \neq \varnothing$. Se sigue que $w^{-1}w'T \cap T \neq \varnothing$. Tomando $u \in \langle a_1^{n_0}, \ldots, a_k^{n_0} \rangle$ tal que $\psi(u) = w^{-1}w'$, obtenemos que $|u| < n_0$. Sin embargo, $|u|$ es al menos n_0 por ser generado de $a_i^{n_0}$, de este modo, $u = \mathbf{1}_{F_k}$ y con esto $w = w'$. □

Sea G un grupo. Notemos que G admite un elemento libre de torsión si y solo si $F_1 \cong \mathbb{Z}$ se incrusta en G. Además, si F_2 se incrusta en G, entonces F_k se incrusta en G para todo $k \geq 1$. Por lo tanto, para probar ambas partes del Teorema D, bastará demostrar que si F_k se incrusta en G para algún $k \geq 1$, entonces $\mathrm{Aut}(A^{F_k})$ se incrusta en $\mathrm{Aut}(X)$.

Teorema 4.1.2. *(Teorema D) Sea G un grupo, $k \geq 1$ y X un G-subshift fuertemente irreducible no trivial. Si F_k se incrusta en G, entonces $\mathrm{Aut}(A^{F_k})$ se incrusta en $\mathrm{Aut}(X)$ para todo alfabeto finito A.*

Demostración. Fijemos $k \geq 1$ y consideremos el **conjunto de pistas** $\mathfrak{T} = \{\top, \bot\}^k$. Para $t = (t_i)_{1 \leq i \leq k} \in \mathfrak{T}$ y $j \in \{1, \ldots, k\}$, definimos el **j-ésimo giro** $\rho_j(t)$ modificando su j-ésima coordenada de la siguiente manera:

$$\big(\rho_j(t)\big)_i = \begin{cases} t_i & \text{si } i \neq j, \\ \top & \text{si } i = j \text{ y } t_j = \bot, \\ \bot & \text{si } i = j \text{ y } t_j = \top. \end{cases}$$

Consideremos el alfabeto $\mathcal{B} = A^{\mathfrak{T}}$ y notemos que $|\mathcal{B}| = |A|^{2^k}$. Sea $K \Subset G$ una constante de irreducibilidad fuerte para X. Como X es además no trivial, existe $F_0 \Subset G$ tal que $|L_{F_0}(X)| \geq |\mathcal{B}|$. Por el Lema 2.2.7, sabemos que X admite marcadores tipo huevo completos, por lo que existen $Y, W \Subset G$ tales que Y es simétrico, contiene la identidad, $F_0 \subset Y \subset W$, y existe una colección $\mathcal{E}'$ de (Y, W)-marcadores tipo huevo que realiza $L_{F_0}(X)$. Como $|L_{F_0}(X)| \geq |\mathcal{B}|$, se sigue que $|\mathcal{E}'| \geq |\mathcal{B}|$. Fijamos un subconjunto $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ con $|\mathcal{E}| = |\mathcal{B}|$. Definimos $A_{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \cup \{\star\}$ y consideramos la función $\eta_{\mathcal{E}} \colon X \to (A_{\mathcal{E}})^G$ dada por:

$$\eta_{\mathcal{E}}(x)(g) = \begin{cases} g^{-1}x|_W & \text{si } g^{-1}x|_W \in \mathcal{E}, \\ \star & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Así, $\eta_{\mathcal{E}}(X) \subset (A_{\mathcal{E}})^G$ es el modelo tipo huevo asociado a $(X, \mathcal{E})$, (ver sección 2.2). Por el Lema 2.2.4, sabemos que el grupo de automorfismos tipo huevo $\mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$ se incrusta en $\mathrm{Aut}(X)$. Por lo tanto, para concluir, basta demostrar que $\mathrm{Aut}(A^{F_k})$ se incrusta en $\mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$.

Dado $x \in X$ y $g \in G$, escribimos $y_x = \eta_{\mathcal{E}}(x)$. Notemos que, dado $x \in X$, las posiciones no-$\star$ de y_x son precisamente aquellas donde ocurre un patrón de $\mathcal{E}$.

Por el Lema 4.1.1, existen $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in G$ tales que $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_k \rangle \cong F_k$ y la colección $\{uWK\}_{u \in \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_k \rangle}$ es disjunta dos a dos. Dado $x \in X$, $g \in G$ y $i \in \{1, \ldots, k\}$, diremos que x en g es

- i**-consistente hacia adelante**, si $\big(y_x\big)(g) \in \mathcal{E}$ y $\big(y_x\big)(g\gamma_i) \in \mathcal{E}$.
- i**-consistente hacia atrás**, si $\big(y_x\big)(g) \in \mathcal{E}$ y $\big(y_x\big)(g\gamma_i^{-1}) \in \mathcal{E}$.

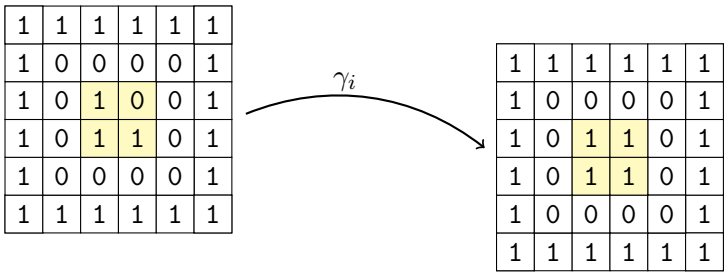


Figura 4.3: Una configuración i-consistente hacia adelante, envía marcadores tipo huevo en marcadores tipo huevo.

Observamos que si x es i-consistente hacia adelante en algún $g \in G$, entonces x es i-consistente hacia atrás en $g\gamma_i$. De manera similar, si x es i-consistente hacia atrás en g, entonces x es i-consistente hacia adelante en $g\gamma_i^{-1}$. Usamos esta propiedad para construir una acción derecha de

F_k sobre $G \times \mathfrak{T}$ que depende de x. Más precisamente, para $x \in X$ y $i \in \{1, \dots, k\}$, definimos la aplicación i-ésima aplicación cinta transportadora $f_{i,x} \in \mathrm{Sym}(G \times \mathfrak{T})$ dado por

$$f_{i,x}(g,t) = \begin{cases} (g\gamma_i, t) & \text{si } t_i = \top \text{ y } x \text{ en } g \text{ es } i\text{-consistente hacia adelante.} \\ (g\gamma_i^{-1}, t) & \text{si } t_i = \bot \text{ y } x \text{ en } g \text{ es } i\text{-consistente hacia atrás.} \\ (g, \rho_i(t)) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que $f_{i,x}$ es de hecho invertible, su inversa se da por

$$f_{i,x}^{-1}(g,t) = \begin{cases} (g\gamma_i^{-1}, t) & \text{si } t_i = \top \text{ y } x \text{ en } g \text{ es } i\text{-consistente hacia atrás.} \\ (g\gamma_i, t) & \text{si } t_i = \bot \text{ y } x \text{ en } g \text{ es } i\text{-consistente hacia adelante.} \\ (g, \rho_i(t)) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Las aplicaciones $f_{1,x}, \dots, f_{k,x}$ inducen una acción derecha ξ_x de F_k sobre $G \times \mathfrak{T}$ donde el generador a_i actúa mediante $f_{i,x}$. Para $u \in F_k$ y $(g,t) \in G \times \mathfrak{T}$, escribimos $\xi_x(g,t,u)$ para el elemento de $G \times \mathfrak{T}$ obtenido por esta acción. Observamos que si $y_x(g) \in \mathcal{E}$, entonces para cualquier $t \in \mathfrak{T}$, la órbita de (g,t) bajo esta acción consistirá exclusivamente de pares (h,t') tales que $y_x(h) \in \mathcal{E}$. Equivalente, para cada $x \in X$ el conjunto $\big(y_x\big)^{-1}(\mathcal{E}) \times \mathfrak{T}$ es invariante bajo la acción derecha de F_k inducida por x.

A continuación, usamos la observación anterior para inducir configuraciones de A^{F_k}. Fijamos una biyección $\Phi\colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$. Para $x \in X$, $g \in G$ y $t \in \mathfrak{T}$ tales que $y_x(g) \in \mathcal{E}$, definimos $c[x,g,t] \in A^{F_k}$ por

$$c[x,g,t](u) = \Phi\Big(\big(y_x\big)(h)\Big)(t') \text{ para cada } u \in F_k, \text{ donde } (h,t') = \xi_x(g,t,u).$$

Notamos que para $x \in X$, $g,h \in G$ y $t \in \mathfrak{T}$ tenemos $c[hx,g,t] = c[x,h^{-1}g,t]$.

A continuación definimos una aplicación $\psi_{\mathcal{E}}\colon \mathrm{Aut}(A^{F_k}) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$. Para $\varphi \in \mathrm{Aut}(A^{F_k})$, $x \in X$ y $g \in G$ definimos

$$\Big(\big(\psi_{\mathcal{E}}(\varphi)\big)(y_x)\Big)(g) = \begin{cases} \Phi^{-1}\Big(\big(\varphi(c[x,g,t])(\mathbf{1}_{F_k})\big)_{t \in \mathfrak{T}}\Big) & \text{si } y_x(g) \in \mathcal{E}, \\ \star & \text{si } y_x(g) = \star. \end{cases}$$

Intuitivamente, $\psi_{\mathcal{E}}(\varphi)$ no altera las posiciones de las estrellas, y en todas las demás posiciones lee la configuración inducida por x en cada cinta, aplica φ y actualiza el símbolo de la cinta correspondiente.

Por el Lema 2.2.2 tenemos que para cada $\varphi \in \mathrm{Aut}(A^{F_k})$ y $x \in X$, la aplicación $\big(\psi_{\mathcal{E}}(\varphi)\big)(y_x) \in \eta_{\mathcal{E}}(X)$. Como φ es continua, es claro que $\psi_{\mathcal{E}}(\varphi)$ es continua. Además, la relación $c[hx,g,t] = c[x,h^{-1}g,t]$ implica que $\psi_{\mathcal{E}}(\varphi)$ es una aplicación G-equivariante, por lo que $\psi_{\mathcal{E}}(\varphi) \in \mathrm{End}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$.

Un cálculo directo muestra que la aplicación $\psi_{\mathcal{E}}$ induce un homomorfismo de $\mathrm{Aut}(A^{F_k})$ a $\mathrm{End}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$, y así, de hecho $\psi_{\mathcal{E}}(\varphi) \in \mathrm{Aut}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$. Finalmente, como la posición de los asteriscos se conserva, cada $\psi_{\mathcal{E}}(\varphi)$ es en realidad un automorfismo tipo huevo, por lo que concluimos que

$\psi_{\mathcal{E}}\colon \mathrm{Aut}(A^{F_k}) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$ es un homomorfismo.

Argumentemos que $\psi_{\mathcal{E}}$ es inyectivo. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Aut}(A^{F_k})$ distintos y sea $\bar{t} = (\top, \dots, \top) \in \mathfrak{T}$. Luego, existe $z \in A^{F_k}$ tal que $\varphi_1(z)(\mathbf{1}_{F_k}) \neq \varphi_2(z)(\mathbf{1}_{F_k})$. Fijamos algún $a \in A$ y para $h \in \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k \rangle$ definimos $b_h \in \mathcal{B}$ como

$$b_h(t) = \begin{cases} z(h) & \text{si } t = \bar{t}, \\ a & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Definimos $q_h = \Phi^{-1}(b_h) \in \mathcal{E}$. Como la colección $\{hWK\}_{h \in \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k \rangle}$ es disjunta dos a dos y X es fuertemente irreducible con constante K, se sigue que existe $\hat{x} \in X$ tal que para cada $h \in \langle \gamma_1, \dots, \gamma_k \rangle$ se cumple

$$(h^{-1}\hat{x})|_W = q_h.$$

Por nuestras definiciones anteriores, se sigue que $c[\hat{x}, \mathbf{1}_G, \bar{t}] = z$ y por lo tanto

$$\Phi\Big(\big((\psi_{\mathcal{E}}(\varphi_1))(y_x)\big)(\mathbf{1}_G)\Big)(\bar{t}) = \varphi_1(c[\hat{x}, \mathbf{1}_G, \bar{t}])(\mathbf{1}_{F_k}) = \varphi_1(z)(\mathbf{1}_{F_k}).$$

$$\Phi\Big(\big((\psi_{\mathcal{E}}(\varphi_2))(y_x)\big)(\mathbf{1}_G)\Big)(\bar{t}) = \varphi_2(c[\hat{x}, \mathbf{1}_G, \bar{t}])(\mathbf{1}_{F_k}) = \varphi_2(z)(\mathbf{1}_{F_k}).$$

Lo que implica que $\psi_{\mathcal{E}}(\varphi_1) \neq \psi_{\mathcal{E}}(\varphi_2)$, por lo que $\psi_{\mathcal{E}}$ es inyectivo. □

Nota 4.1.3. Teniendo en cuenta los resultados de incrustación obtenidos hasta el momento, que nos proporcionan condiciones sobre los grupos G para poder incrustar $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$ o $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{F_2})$ en $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^G)$, surge naturalmente la pregunta de si estos dos grupos de automorfismos son isomorfos, es decir, si $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}) \cong \mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathcal{F}_2})$. No obstante, la respuesta es negativa. Salo demostró en [33] que el problema de la palabra para $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$ pertenece a la clase **co-NP**, véase [32], mientras que para $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{F_2})$ pertenece a PSPACE, véase en [33]. Esto impide que los grupos sean isomorfos.

4.2 Incrustaciones en $\mathrm{Aut}(X)$ caso no localmente finito o no promediable

La estructura de la demostración del Teorema E es similar a la del Teorema D, salvo que en este caso podría no existir una copia incrustada de F_k en G. Esto se soluciona codificando en su lugar una serie de movimientos geométricos según un conjunto grande de generadores, como en la demostración de la Proposición 4.0.2, y demostrando que con estos movimientos se puede realizar una copia geométrica inflada de F_k. La principal dificultad radica en que ahora el conjunto de marcadores tipo huevo debe tener suficiente espacio interno en la yema para codificar este conjunto de movimientos, mientras que, al mismo tiempo, el conjunto de movimientos crece conforme tomamos marcadores tipo huevo con mayor soporte. De ahí la necesidad de tomar un subshift con la

propiedad TMP fuerte y de cotas explícitas en el lema del marcador.

Antes de abordar la demostración del Teorema E, necesitamos probar un resultado técnico (Lema 4.2.2) que establece que los grupos no promediables, en inglés *nonamenable*, pueden ser "inflados" arbitrariamente preservando su estructura local de manera geométrica gruesa. Para ello, recordemos algunas nociones clásicas.

Recordemos que un grupo G se dice **no promediable** si existe $T \Subset G$ y $\delta > 0$ tales que para todo $F \Subset G$, se cumple que:

$$|FT \smallsetminus F| > \delta |F|.$$

Un cálculo elemental muestra que si G es no promediable, entonces se puede encontrar un conjunto $T_0 \Subset G$ tal que $|FT_0| > 2|F|$ para todo $F \Subset G$ (ver [6, Teorema 4.9.2]).

Sea G un grupo finitamente generado, $S \Subset G$ un conjunto de generadores simétrico y m un entero positivo. Decimos que $\Delta \subset G$ es:

- m**-separado** si para todo $g, h \in \Delta$ distintos se cumple $d_S(g, h) \geq m$.
- m**-cubierto** si para todo $h \in G$ existe $g \in \Delta$ tal que $d_S(g, h) \leq m$.

Observación 4.2.1. Observemos que todo conjunto maximal m-separado $\Delta \subset G$ es necesariamente m-cubierto. Supongamos que no, entonces existe $h \in G$ tal que para todo $g \in \Delta$ $d_S(g, h) \geq m$, esto contradice la maximalidad de Δ, pues el conjunto $\Delta' = \Delta \cup \{h\}$ también es m-separado.

Un **grafo bipartito** es un grafo no dirigido Γ cuyo conjunto de vértices es la unión de dos conjuntos disjuntos U y V, y todas sus aristas están entre elementos de U y elementos de V. Decimos que Γ es **localmente finito** si el grado de cada vértice es finito. Dado un vértice u en Γ, denotamos por $\mathcal{N}(u)$ al conjunto de todos los vértices adyacentes a u, y para un conjunto de vértices A, escribimos $\mathcal{N}(A) = \bigcup_{u \in A} \mathcal{N}(u)$.

Un **emparejamiento perfecto** es una biyección $\varphi \colon U \to V$ con la propiedad de que $(u, \varphi(u))$ es una arista para todo $u \in U$. Decimos que Γ satisface la **condición de Hall** si para todo $A \Subset U$ y $B \Subset V$, se cumple $|\mathcal{N}(A)| \geq |A|$ y $|\mathcal{N}(B)| \geq |B|$. El **teorema de emparejamiento de Hall** [14] establece que un grafo bipartito localmente finito admite un emparejamiento perfecto si y solo si satisface la condición de Hall.

Lema 4.2.2. *Sea G un grupo finitamente generado no promediable y sea $S \Subset G$ un conjunto generador simétrico. Existe una constante $C \geq 1$ tal que para todo entero positivo m y todo subconjunto m-cubierto Δ de G, existe una biyección $\varphi \colon G \to \Delta$ tal que*

$$d_S(g, \varphi(g)) \leq Cm, \quad \text{para todo } g \in G.$$

Demostración. Para $n \geq 0$, denotamos por $B(n)$ la bola de radio n respecto a la métrica de la palabra generada por S. Como G es no promediable, existe $T_0 \Subset G$ tal que para todo $F \Subset G$, se tiene $|FT_0| > 2|F|$. Sea t_0 tal que $T_0 \subset B(t_0)$, y notemos que $|FB(t_0)| \geq |FT_0| > 2|F|$. En particular, obtenemos que:

$$|FB(mt_0\lceil \log_2(|S|)\rceil)| \geq |S|^m|F|.$$

Como $|B(m)| \leq |S|^m$, si tomamos $C = t_0\lceil \log_2(|S|)\rceil$, se cumple que:

$$|FB(Cm)| \geq |B(m)||F|.$$

Ahora consideremos el grafo bipartito localmente finito Γ, donde los vértices son la unión disjunta de $U = G$ y $V = \Delta$, y $\{g, h\}$ con $g \in G$ y $h \in \Delta$ es una arista si y solo si $d_S(g, h) \leq Cm$. Una función φ que satisface las hipótesis del lema está dada por un emparejamiento perfecto en Γ. Así, basta verificar que Γ satisface la condición de Hall.

Para todo $B \Subset \Delta$, el conjunto $\mathcal{N}(B) \subseteq G$ es al menos tan grande como B porque (h, h) es una arista para cada $h \in \Delta$. Ahora, para $A \Subset G$, observemos que:

$$\mathcal{N}(A) = \Delta \cap \bigcup_{g\in A} gB(Cm) = \Delta \cap AB(Cm).$$

Como Δ es m-cubierto, tenemos:

$$|\mathcal{N}(A)| = |\Delta \cap AB(Cm)| \geq \frac{|AB(Cm)|}{|B(m)|}.$$

Como $|AB(Cm)| \geq |B(m)||A|$, obtenemos que $|\mathcal{N}(A)| \geq |A|$. Así, se satisface la condición de Hall. □

El último ingrediente es el hecho de que todo grupo no promediable contiene una copia "inflada geométricamente" del grupo libre F_2. Para esto usamos el siguiente resultado de Whyte [36] sobre la existencia de acciones tipo traslación de F_2 en grupos no promediables. Recordemos que un grupo G actúa **tipo traslación** en un espacio métrico (X, d) si la acción es libre y acotada, es decir, para cada $g \in G$ tenemos que $\sup_{x\in X} d(x, g \cdot x) < \infty$.

Teorema 4.2.3 (Teorema 6.1 [36])**.** *Sea G un grupo finitamente generado dotado con una métrica de la palabra. Entonces, G es no promediable si y solo si G admite una acción tipo traslación de F_2.*

En el siguiente resultado, usamos d_{F_k} para denotar la métrica de la palabra canónica en F_k.

Lema 4.2.4. *Sea G un grupo finitamente generado no promediable, $S \Subset G$ un conjunto generador simétrico y $k \geq 1$. Entonces, existe una constante $N \geq 1$ tal que para todo entero positivo m, existe una sucesión $(\gamma_u)_{u \in F_k}$ de elementos de G que satisface las siguientes propiedades:*

1. *La colección $(\gamma_u B_S(m))_{u \in F_k}$ es disjunta dos a dos.*
2. *$d_S(\gamma_u, \gamma_v) \leq (4m + 2 + d_{F_k}(u, v))N$ para todo $u, v \in F_k$.*

Demostración. Sabemos por el Teorema 4.2.3 que G admite una acción tipo traslación de F_2. Como F_k se incrusta en F_2 para todo $k \geq 1$, se sigue que G también admite una acción tipo traslación de F_k. Para cada $u \in F_k$, denotamos $g_u = u \cdot \mathbf{1}_G$ al elemento obtenido al actuar por u en la identidad de G, de modo que $\{g_u\}_{u \in F_k}$ denota la órbita de la identidad.

Como la acción anterior es libre, se sigue que $\{g_u\}_{u \in F_k}$ no repite elementos. Además, como la acción es acotada, existe una constante $L \geq 1$ tal que

$$d_S(g_u, g_v) \leq L d_{F_k}(u, v).$$

Fijemos m y sea Δ un subconjunto maximal $(2m+1)$-separado de G, usando la observación elemental 4.2.1, implica que Δ también es $(2m+1)$-cubierto, y por el Lema 4.2.2, existe $C \geq 1$ y una biyección $\varphi \colon G \to \Delta$ tal que

$$d_S(g, \varphi(g)) \leq C(2m+1), \quad \text{para todo } g \in G.$$

Para cada $u \in F_k$, definimos $\gamma_u = \varphi(g_u)$ y tomamos $N = \max(C, L)$. Como $\{g_u\}_{u \in F_k}$ no repite elementos y φ es una biyección, se sigue que $\{\gamma_u\}_{u \in F_k}$ tampoco repite elementos. Además, dado que cada $\gamma_u \in \Delta$ y Δ es $(2m+1)$-separado, se sigue que $(\gamma_u B_S(m))_{u \in F_k}$ es disjunta dos a dos.

Finalmente, por desigualdad triangular, para todo $u, v \in F_k$ se cumple:

$$\begin{aligned} d_S(\gamma_u, \gamma_v) &\leq d_S(g_u, \gamma_u) + d_S(g_u, g_v) + d_S(g_v, \gamma_v) \\ &\leq C(2m+1) + L d_{F_k}(u, v) + C(2m+1) \\ &\leq (4m + 2 + d_{F_k}(u, v))N. \end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.5. *Sea G un grupo finitamente generado y X un G-subshift fuertemente irreducible no trivial que satisface la propiedad TMP fuerte. Para todo alfabeto finito A:*

(1) Si G es infinito, entonces $\mathrm{Aut}(A^{\mathbb{Z}})$ se incrusta en $\mathrm{Aut}(X)$.

(2) Si G es no promediable, entonces $\mathrm{Aut}(A^{F_k})$ se incrusta en $\mathrm{Aut}(X)$ para todo $k \geq 1$.

Demostración. Sea K una constante de irreducibilidad fuerte para X. Fijemos un conjunto generador simétrico $S \Subset G$ tal que $K \subset S$. Para $n \geq 0$, denotemos por $B(n)$ la bola de radio n respecto a la métrica de la palabra generada por S y notemos que $K \subset B(1)$.

Dividimos la prueba en dos casos y luego unificamos ambos enfoques.

Caso 1: Si G es infinito y promediable, fijamos $k = 1$ y mostramos que $\mathrm{Aut}(A^{F_k})$ se incrusta en $\mathrm{Aut}(X)$. Notemos que si la función $n \mapsto |B(n)|$ tiene crecimiento lineal, entonces G es virtualmente $\mathbb{Z}$, (ver [11]) y la conclusión se sigue del Teorema D. Por lo tanto, podemos asumir que la función $n \mapsto |B(n)|$ es superlineal y en este caso, elegimos $N = 1$.

Caso 2: Si G es no promediable, tomamos $k \geq 1$ arbitrario y mostramos que $\mathrm{Aut}(A^{F_k})$ se incrusta en $\mathrm{Aut}(X)$. En este caso, la función $n \mapsto |B(n)|$ tiene crecimiento exponencial. Escogemos $N \geq 1$ como la constante dada por el Lema 4.2.4 asociada a G y S.

En ambos casos podemos elegir un entero positivo r tal que:

(a) Existe un conjunto de $(B(2r), B(74r))$-marcadores tipo huevo para X que realiza $\mathrm{L}_{B(r)}(X)$.

(b) $\log(|\mathrm{L}_{B(r)}(X)|) \geq 2^k \log(|A|) + 2k \log(|B((296r+7)N)|)$.

Por el Lema 2.2.8, la condición (a) se cumple para todo r suficientemente grande. Para la condición (b), notemos que:

$$2^k \log(|A|) + 2k \log(|B((296r+7)N)|) \leq 2^k \big(\log(|A|) + (296r+7)N \log(|S|)\big).$$

Por la Proposición 1.2.19 y el hecho de que X es no trivial, tenemos que:

$$\log(|L_{B(r)}(X)|) \geq \frac{|B(r)| \log(|L_{\{\mathbf{1}_G\}}(X)|)}{2|K|} \geq \frac{|B(r)| \log(2)}{2|K|}.$$

Así, basta argumentar que para r suficientemente grande:

$$|B(r)| \geq \frac{2^{k+1}|K|}{\log(2)} \big(\log(|A|) + (296r+7)N \log(|S|)\big).$$

Como el lado derecho crece linealmente en r y en ambos casos $r \mapsto |B(r)|$ es superlineal, se sigue que (b) se cumple para r grande.

Ahora consideramos ambos casos simultáneamente. Definimos el **conjunto de pistas** como $\mathfrak{T} = \{\top, \bot\}^k$. Para $t = (t_i)_{1 \leq i \leq k} \in \mathfrak{T}$ y $j \in \{1, \ldots, k\}$, definimos el **j-ésimo giro** $\rho_j(t)$ modificando su j-ésima coordenada de la siguiente manera:

$$\big(\rho_j(t)\big)_i = \begin{cases} t_i & \text{si } i \neq j, \\ \top & \text{si } i = j \text{ y } t_j = \bot, \\ \bot & \text{si } i = j \text{ y } t_j = \top. \end{cases}$$

Sea $D = B((296r+7)N)$ el conjunto de **direcciones** y definimos $\mathcal{B} = D^{2k} \times A^{\mathfrak{T}}$. Sabemos, por la condición (a), que existe un conjunto $\mathcal{E}'$ de $(B(2r), B(74r))$-marcadores tipo huevo para X que realiza $L_{B(r)}(X)$, y por la condición (b), se cumple que:

$$|\mathcal{E}'| \geq |L_{B(r)}(X)| \geq |A|^{2^k} |D|^{2k} = |\mathcal{B}|.$$

Por lo tanto, podemos extraer un subconjunto de marcadores tipo huevo $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$ con $|\mathcal{E}| = |\mathcal{B}|$ y fijar una biyección $\Phi \colon \mathcal{E} \to \mathcal{B}$.

Sea $A_{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \cup \{\star\}$ y definimos la aplicación $\eta_{\mathcal{E}} \colon X \to (A_{\mathcal{E}})^G$ dada por:

$$\eta_{\mathcal{E}}(x)(g) = \begin{cases} g^{-1}x|_W & \text{si } g^{-1}x|_W \in \mathcal{E}, \\ \star & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, $\eta_{\mathcal{E}}(X)$ es el modelo tipo huevo asociado a $(X, \mathcal{E})$. Sabemos por el Lema 2.2.4 que el grupo de automorfismos tipo huevo $\mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$ se incrusta en $\mathrm{Aut}(X)$. Así, basta demostrar que $\mathrm{Aut}(A^{F_k})$ se incrusta en $\mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$.

Dado $d \in D^{2k}$, escribimos $d = (d_1^{-1}, d_1^{+1}, \ldots, d_k^{-1}, d_k^{+1})$. Además, para $q \in \mathcal{E}$ tal que $\Phi(q) = (d, w) \in D^{2k} \times A^{\mathfrak{T}}$, y para $i \in \{1, \ldots, k\}$, escribimos:

$$\delta(q) = d, \quad \mathfrak{b}_i(q) = d_i^{-1}, \quad \mathfrak{f}_i(q) = d_i^{+1}, \quad \text{y} \quad t(q) = w(t).$$

Recordemos que $\mathfrak{b}, \mathfrak{f} \in D^{2k}$ son punteros, mientras que $\delta, t \in A^{\mathfrak{T}}$ son símbolos. Para facilitar la notación, dados $x \in X$ y $g \in G$, escribimos $y_x = \eta_{\mathcal{E}}(x)$. Decimos que x en g es:

- i**-consistente hacia adelante**, si $y_x(g) \in \mathcal{E}$, $y_x(g\mathfrak{f}_i\big(y_x(g)\big)) \in \mathcal{E}$ y además:

$$\big(\mathfrak{f}_i(y_x(g))\big)^{-1} = \mathfrak{b}_i(y_x(g\mathfrak{f}_i(y_x(g)))).$$

- i**-consistente hacia atrás**, si $y_x(g) \in \mathcal{E}$, $y_x(g\mathfrak{b}_i\big(y_x(g)\big)) \in \mathcal{E}$ y además:

$$\big(\mathfrak{b}_i(y_x(g))\big)^{-1} = \mathfrak{f}_i(y_x(g\mathfrak{b}_i(y_x(g)))).$$

Ahora, para $x \in X$ y $i \in \{1, \ldots, k\}$, definimos la aplicación cinta transportadora $f_{i,x} \in \mathrm{Sym}(G \times \mathfrak{T})$ como:

$$f_{i,x}(g,t) = \begin{cases} (g\mathfrak{f}_i(x(g)), t) & \text{si } t_i = \top \text{ y } x \text{ en } g \text{ es } i\text{-consistente hacia adelante,} \\ (g\mathfrak{b}_i(x(g)), t) & \text{si } t_i = \bot \text{ y } x \text{ en } g \text{ es } i\text{-consistente hacia atrás,} \\ (g, \rho_i(t)) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De manera similar a la demostración del Teorema D, las aplicaciones $f_{i,x}$ son invertibles y, por lo tanto, son verdaderos elementos de $\mathrm{Sym}(G \times \mathfrak{T})$, por lo que inducen una acción derecha de F_k sobre $G \times \mathfrak{T}$ donde el generador a_i actúa mediante $f_{i,x}$. Para $u \in F_k$ y $(g,t) \in G \times \mathfrak{T}$, escribimos $\xi_x(g,t,u)$ para el elemento de $G \times \mathfrak{T}$ obtenido por esta acción.

Para cada $x \in X$, $g \in G$ y $t \in \mathfrak{T}$ tal que $y_x(g) \in \mathcal{E}$, definimos $c[x,g,t] \in A^{F_k}$ por:

$$c[x,g,t](u) = \Phi\big(y_x(h)\big)(t') \quad \text{para todo } u \in F_k, \text{ donde } (h,t') = \xi_x(g,t,u).$$

Un cálculo directo muestra que para $x \in X$, $g,h \in G$ y $t \in \mathfrak{T}$ se tiene que $c[hx,g,t] = c[x,h^{-1}g,t]$.

A continuación definimos la aplicación $\psi_{\mathcal{E}} \colon \mathrm{Aut}(A^{F_k}) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$. Para $\varphi \in \mathrm{Aut}(A^{F_k})$, $x \in X$ y $g \in G$ definimos:

$$\Big(\big(\psi_{\mathcal{E}}(\varphi)\big)(y_x)\Big)(g) = \begin{cases} \Phi^{-1}\Big(\delta(y_x(g)), \big(\varphi(c[x,g,t])(\mathbf{1}_{F_k})\big)_{t\in\mathfrak{T}}\Big) & \text{si } y_x(g) \in \mathcal{E}, \\ \star & \text{si } y_x(g) = \star. \end{cases}$$

Por el Lema 2.2.2 tenemos que para cada $\varphi \in \mathrm{Aut}(A^{F_k})$ y $x \in X$, el elemento $\big(\psi_{\mathcal{E}}(\varphi)\big)(y_x) \in \eta_{\mathcal{E}}(X)$. Es claro por definición que $\psi_{\mathcal{E}}(\varphi)$ es continua, y su G-equivarianza se sigue del hecho de que $c[hx,g,t] = c[x,h^{-1}g,t]$, por lo tanto $\psi_{\mathcal{E}}(\varphi) \in \mathrm{End}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$. Además, $\psi_{\mathcal{E}}$ induce un homomorfismo de $\mathrm{Aut}(A^{F_k})$ en $\mathrm{End}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$, y así $\psi_{\mathcal{E}}(\varphi) \in \mathrm{Aut}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$. Finalmente, como la posición de las estrellas se preserva, cada $\psi_{\mathcal{E}}(\varphi)$ es en realidad un automorfismo tipo huevo, y por lo tanto concluimos que $\psi_{\mathcal{E}} \colon \mathrm{Aut}(A^{F_k}) \to \mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$ es un homomorfismo.

Mostremos que $\psi_{\mathcal{E}}$ es inyectiva. Sean φ_1, φ_2 automorfismos distintos en $\mathrm{Aut}(A^{F_k})$ y $z \in A^{F_k}$ tal que $\varphi_1(z)(\mathbf{1}_{F_k}) \neq \varphi_2(z)(\mathbf{1}_{F_k})$. Para la siguiente parte, separamos nuevamente el análisis en dos casos.

En el caso (1), como G es infinito, existe una geodésica bi-infinita $(g_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ (es decir, tal que para $i,j \in \mathbb{Z}$, $|g_i^{-1}g_j|_S = |i-j|$). Para $i \in \mathbb{Z}$, elegimos $\gamma_i = g_{(148r+2)i}$ y notamos que la colección $\{\gamma_i B(74r)K\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es disjunta dos a dos, pues $B(74r)K \subset B(74r+1)$, y además, $|\gamma_i^{-1}\gamma_{i-1}| = |\gamma_i^{-1}\gamma_{i+1}| = 148r+2 \leq (296r+6)N$, por lo tanto ambos $\gamma_i^{-1}\gamma_{i-1}$ y $\gamma_i^{-1}\gamma_{i+1}$ están en D. A través de la identificación canónica $\mathbb{Z} \cong F_1$, reescribimos la colección como $\{\gamma_u\}_{u\in F_1}$.

En el caso (2), usamos el Lema 4.2.4 con $m = 74r+1$ y obtenemos una colección $\{\gamma_u\}_{u\in F_k}$ de elementos de G que satisfacen que $(\gamma_u B(74r+1))_{u\in F_k}$ es disjunta dos a dos, y $|\gamma_u^{-1}\gamma_v| \leq (296r+6+d_{F_k}(u,v))N$ para todo $u,v \in F_k$. En particular, se sigue que $(\gamma_u B(74r)K)_{u\in F_k}$ es

disjunta dos a dos y que para cualquier $i \in \{1, \dots, k\}$ y generador a_i de $\mathcal{B}$, tenemos

$$|\gamma_u^{-1}\gamma_{ua_i}| \leq (296r+7)N \quad \text{y} \quad |\gamma_u^{-1}\gamma_{ua_i^{-1}}| \leq (296r+7)N.$$

Por lo tanto, tanto $\gamma_u^{-1}\gamma_{ua_i^{-1}}$ como $\gamma_u^{-1}\gamma_{ua_i}$ están en D.

Ahora continuamos con ambos casos simultáneamente. Fijamos algún $b \in A$. Para $u \in F_k$ definimos $(d_u, w_u) \in D^{2k} \times A^{\mathfrak{T}}$ como:

$$d_u = \big(\gamma_u^{-1}\gamma_{ua_1^{-1}}, \gamma_u^{-1}\gamma_{ua_1}, \dots, \gamma_u^{-1}\gamma_{ua_k^{-1}}, \gamma_u^{-1}\gamma_{ua_k}\big),$$

$$w_u(t) = \begin{cases} z(u) & \text{si } t = (\top, \dots, \top). \\ b & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para $u \in F_k$, definimos $q_u = \Phi^{-1}(d_u, w_u)$. Como X es fuertemente irreducible y $\{\gamma_u B(74r)K\}_{u \in F_k}$ es disjunta dos a dos, existe $x \in X$ tal que $(\gamma_u^{-1}x)|_{B(74r)} = q_u$ para cada u. Por construcción, se sigue que $c[x, \gamma_{\mathbf{1}_{F_k}}, (\top, \dots, \top)] = z$ y, por lo tanto,

$$\Big(\big(\psi_{\mathcal{E}}(\varphi_1)\big)(y_x)\Big)(\gamma_{\mathbf{1}_{F_k}}) \neq \Big(\big(\psi_{\mathcal{E}}(\varphi_2)\big)(y_x)\Big)(\gamma_{\mathbf{1}_{F_k}}).$$

Así, $\psi_{\mathcal{E}}(\varphi_1) \neq \psi_{\mathcal{E}}(\varphi_2)$, lo cual demuestra que $\psi_{\mathcal{E}}$ es inyectiva. Concluimos que $\mathrm{Aut}(A^{F_k})$ se incrusta en el grupo de automorfismos tipo huevo $\mathrm{Aut}_{\mathcal{E}}(\eta_{\mathcal{E}}(X))$, por lo tanto, se incrusta en $\mathrm{Aut}(X)$.

□

Demostración del Teorema E. Sea K la constante de irreducibilidad fuerte para X. Si G no es localmente finito, tomamos $H \leqslant G$ como un subgrupo infinito finitamente generado que contiene a K. Si además G es no promediable, tomamos $H \leqslant G$ como un subgrupo no promediable finitamente generado que contiene a K (notemos que los grupos localmente promediables son promediables [6, Corollary 4.5.11]). Sea $X|_H = \{x|_H : x \in X\}$ y notamos que también es no trivial. Por la Proposición 1.3.9 tenemos que K también es una constante de irreducibilidad fuerte para $X|_H$, que $X|_H$ tiene la propiedad de ser TMP fuerte y que $\mathrm{Aut}(X|_H)$ se incrusta en $\mathrm{Aut}(X)$. El resultado se sigue aplicando el Teorema 4.2.5 a $X|_H$.

□

Todos los resultados en la Sección 4 se refieren a la incrustación del grupo de automorfismos de un full shift en un grupo libre. Una pregunta natural es si esto se puede extender a subshifts fuertemente irreducibles y a grupos que no sean libres.

Pregunta 4.2.6. ¿Bajo qué condiciones los grupos de automorfismos de dos subshifts fuertemente irreducibles (en el mismo grupo) se incrustan uno en el otro?

En particular, sería interesante saber cuándo el grupo de automorfismos de un F_k-subshift fuertemente irreducible se incrusta en $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{F_k})$. Una condición natural para la pregunta anterior (al menos cuando el grupo es residualmente finito) sería pedir órbitas periódicas densas y condiciones de tipo finito.

Pregunta 4.2.7. Sea G un grupo infinito no localmente finito. ¿Se incrustan $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^G)$ y $\mathrm{Aut}(\{0,1,2\}^G)$ uno en el otro?

El principal problema con esta pregunta es que la técnica de la cinta transportadora no se puede extender de manera natural más allá de los grupos (virtualmente) libres. No conocemos técnicas alternativas para abordar esta pregunta en grupos generales.

A continuación, nos preguntamos sobre las hipótesis necesarias para demostrar el Teorema E.

Pregunta 4.2.8. ¿Se puede eliminar o debilitar la condición de TMP fuerte en el Teorema E?

Sospechamos que, al menos en el caso no localmente finito, la respuesta podría ser afirmativa. De hecho, digamos que un grupo contable G tiene la propiedad ($\heartsuit$) si existe $M \geq 1$ tal que para todo $F \Subset G$, existe $S \Subset G$ con $|S| \leq M$ y $(g_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ tal que la colección $\{g_iF\}_{i\in\mathbb{Z}}$ es disjunta dos a dos y $g_i^{-1}g_{i+1} \in S$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Usando el Lema 4.1.1, se sigue que un grupo G tiene un elemento libre de torsión si y solo si satisface la propiedad ($\heartsuit$) con $M = 1$. No es difícil ver que un grupo de torsión con la propiedad ($\heartsuit$) satisfaría el teorema de incrustación sin la hipótesis de TMP fuerte (en la demostración del Teorema 4.2.5, se tomaría como conjunto de direcciones $\{1,\dots,M\}$ e interpretaría adecuadamente según el marcador). Sin embargo, no conocemos ejemplos de grupos de torsión que satisfagan la propiedad ($\heartsuit$).

En los Teoremas D y E, nos centramos en demostrar que el grupo de automorfismos de un F_2-full shift se incrusta en otro grupo de automorfismos. Sin embargo, esto habría sido inútil si en realidad $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{F_2})$ se incrusta en $\mathrm{Aut}(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$.

Bibliografía

[1] S. Barbieri, F. García-Ramos, and H. Li. Markovian properties of continuous group actions: algebraic actions, entropy and the homoclinic group. *Adv. Math.*, 397:108196, 1–52, 2022.

[2] S. Barbieri, R. Gómez, B. Marcus, and S. Taati. Equivalence of relative Gibbs and relative equilibrium measures for actions of countable amenable groups. *Nonlinearity*, 33(5):2409–2454, 2020.

[3] S. Barbieri and T. Meyerovitch. The Lanford-Ruelle theorem for actions of sofic groups. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 376(2):1299–1342, 2023.

[4] M. Boyle. Lower entropy factors of sofic systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 3(4):541–557, 1983.

[5] M. Boyle, D. A. Lind, and D. Rudolph. The automorphism group of a shift of finite type. *Transactions of the American Mathematical Society*, 306(1):71–114, 1988.

[6] T. Ceccherini-Silberstein and M. Coornaert. *Cellular Automata and Groups.* Springer, 2009.

[7] N. Chandgotia, G. Han, B. Marcus, T. Meyerovitch, and R. Pavlov. One-dimensional Markov random fields, Markov chains and topological Markov fields. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 142(1):227–242, 2014.

[8] V. Cyr, J. Franks, B. Kra, and S. Petite. Distortion and the automorphism group of a shift. *Journal of Modern Dynamics*, 13(0):147–161, 2018.

[9] V. Cyr and B. Kra. The automorphism group of a shift of linear growth: Beyond transitivity. *Forum of Mathematics, Sigma*, 3, 2014.

[10] J. Frisch, T. Schlank, and O. Tamuz. Normal amenable subgroups of the automorphism group of the full shift. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 39(5):1290–1298, Sept. 2017.

[11] M. Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Publications Mathématiques de lÍnstitut des Hautes Études Scientifiques*, 53:53–78, 1981.

[12] M. Gromov. Endomorphisms of symbolic algebraic varieties. *Journal of the European Mathematical Society*, 1(2):109–197, 1999.

[13] P. Guillon and V. Salo. Distortion in one-head machines and cellular automata. In A. Dennunzio, E. Formenti, L. Manzoni, and A. E. Porreca, editors, *Cellular Automata and Discrete Complex Systems*, pages 120–138, Cham, 2017. Springer International Publishing.

[14] M. Hall. Distinct representatives of subsets. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 54:922–926, 1948.

[15] Y. Hartman, B. Kra, and S. Schmieding. The stabilized automorphism group of a subshift. *International Mathematics Research Notices*, 2022(21):17112–17186, 2022.

[16] G. A. Hedlund. Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system. *Mathematical systems theory*, 3(4):320–375, 1969.

[17] M. Hochman. http://math.huji.ac.il/%7Emhochman/problems/automorphisms.pdf.

[18] M. Hochman. On the automorphism groups of multidimensional shifts of finite type. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 30(03):809–840, 2010.

[19] K. H. Kim and F. W. Roush. On the automorphism groups of subshifts. *Pure Mathematics and Applications*, 1(4):203–230, 1990.

[20] J. Kopra. Glider automorphisms and a finitary Ryan's theorem for transitive subshifts of finite type. *Nat. Comput.*, 19(4):773–786, 2020.

[21] J. Kopra. Glider automata on all transitive sofic shifts. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 42(12):3716–3744, 2022.

[22] B. Kra and V. Cyr. The automorphism group of a minimal shift of stretched exponential growth. *Journal of Modern Dynamics*, 10(02):483–495, 2016.

[23] W. Krieger. On the subsystems of topological markov chains. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 2(2):195–202, 1982.

[24] D. Lind and B. Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 2021. Second edition.

[25] D. A. Lind. The entropies of topological markov shifts and a related class of algebraic integers. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 4(2):283–300, 1984.

[26] K. McGoff and R. Pavlov. Ubiquity of entropies of intermediate factors. *Journal of the London Mathematical Society*, 104(2):865–885, 2021.

[27] A. Y. Olshanskii. An infinite group with subgroups of prime orders. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 16(2):279, apr 1981.

[28] J. Raymond. Shifts of finite type on locally finite groups. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 44(12):3565–3598, 2024.

[29] J. P. Ryan. The shift and commutativity. *Mathematical Systems Theory*, 6(1):82–85, 1972.

[30] V. Salo. A note on subgroups of automorphism groups of full shifts. arXiv:1507.00820, 2015.

[31] V. Salo. Transitive action on finite points of a full shift and a finitary Ryan's theorem. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 39(6):1637–1667, 2019.

[32] V. Salo. Conjugacy of reversible cellular automata and one-head machines. *ArXiv:2011.07827*, 2022.

[33] V. Salo. Word problems and embedding-obstructions in cellular automata groups on groups, 2025.

[34] V. Salo and S. Schmieding. Finitary Ryan's and local $\mathcal{Q}$ entropy for $\mathbb{Z}^d$ subshifts. *ArXiv:2503.03058*, 2025.

[35] T. Ward. Automorphisms of $\mathbb{Z}^d$-subshifts of finite type. *Indagationes Mathematicae*, 5(4):495–504, 1994.

[36] K. Whyte. Amenability, bilipschitz equivalence, and the von Neumann conjecture. *Duke Mathematical Journal*, 99(1):93–112, 1999.

[37] K. Yang. Normal amenable subgroups of the automorphism group of sofic shifts. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 41(4):1250–1263, Feb. 2020.

[38] J. T. M. Yash Lodha. A nonamenable finitely presented group of piecewise projective homeomorphisms. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 10:177–200, 2016.