



Universidad de Santiago de Chile  
Facultad de Ciencias  
Departamento de Matemáticas y Ciencias de la Computación

## **Problema 108 de Rufus Bowen**

Tesis entregada a la  
Universidad de Santiago de Chile  
en cumplimiento parcial de los requisitos para optar al grado de  
Magíster en Ciencias en la especialidad de Matemática

---

Presentada por

**ESTEBAN CIFUENTES ALVARADO**

Dirigido por

**Sebastián Barbieri Lemp**

Santiago, marzo de 2024.

# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1. Sistemas Dinámicos . . . . .	2
1.1.1. Dinámica Simbólica . . . . .	3
1.2. Espacios de shift . . . . .	3
1.2.1. Topología de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ . . . . .	4
1.2.2. Tipos de Subshift . . . . .	10
1.2.3. Grafos de espacios de shift . . . . .	12
1.3. Entropía . . . . .	16
1.4. Calculabilidad y Complejidad . . . . .	22
1.4.1. Autómatas finitos deterministas . . . . .	22
1.4.2. Máquinas de Turing . . . . .	25
1.5. Presentaciones de grupos . . . . .	29
1.5.1. Presentación de Monoide . . . . .	29
1.5.2. Problema de la Palabra . . . . .	32
1.6. Grupos hiperbólicos . . . . .	32
<b>2. Análisis del Problema 108 de Rufus Bowen</b>	<b>34</b>
2.1. Análisis de grupo finitos . . . . .	35
2.2. Análisis de $X_{\mathcal{WP}(\Gamma,S)}$ para clases particulares de grupos . . . . .	36
2.2.1. Análisis de grupos libres . . . . .	36
2.2.2. Análisis de grupos que no son libres . . . . .	41
2.3. Análisis de $X_{Geo(\Gamma,S)}$ para algunos grupos . . . . .	43
<b>3. Conclusiones</b>	<b>48</b>

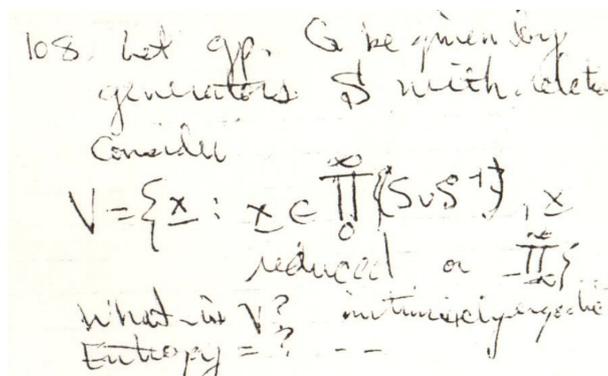
# Introducción

En este trabajo, realizado para obtener el grado de magíster en ciencias en la especialidad de matemática, se presentarán ejemplos y resultados derivados del análisis de una dirección de investigación que dejó el matemático Rufus Bowen en sus notas recopiladas tras su deceso. Los alumnos de Bowen encontraron estas notas planteadas en un manuscrito, las cuales posteriormente fueron transcritas en [1].



Rufus Bowen

A continuación presentaremos el problema 108 tal como lo escribió Rufus Bowen en sus notas.



La transcripción expuesta en [1] es la siguiente.

Sea un grupo  $G$  dado por un generador  $S$  y relaciones. Considere el conjunto  $V$  de palabras infinitas reducidas (de un solo lado o de dos lados).

- i) ¿Qué es  $V$ ?
- ii) ¿ $V$  es intrínsecamente ergódico?
- iii) ¿Qué es la Entropía de  $V$ ?

La investigación se enfocará en los puntos *i*) y *iii*) y será estudiada principalmente bajo la lupa de la dinámica simbólica, la teoría de grupos y la calculabilidad. En el punto *i*) el interés radica en analizar la relación entre las estructuras dinámicas y las características de los grupos respecto a sus generadores. Con respecto al punto *iii*) buscaremos determinar si es una propiedad del grupo o bien, si depende de la elección de generadores de este. Nos interesaremos también en los distintos valores que puedan obtenerse de esta forma y en posibles interpretaciones dinámicas y combinatoriales.

# 1

---

## Preliminares

En este capítulo se introducirán las nociones claves para comprender el problema 108 que fue planteado por Rufus Bowen, además de introducir las herramientas que fueron utilizadas para proporcionar una respuesta. Se comenzará dando una breve introducción a la dinámica simbólica, centrada en los espacios de shift, luego se relacionará la complejidad de los lenguajes que generan estos espacios con la teoría de computabilidad. Finalmente, se explorará propiedades de las presentaciones de grupos y se introducirá brevemente los grupos hiperbólicos en el sentido de Gromov.

### 1.1

#### Sistemas Dinámicos

El movimiento de un péndulo es determinado por el ángulo con la vertical y su velocidad angular. Si consideramos un conjunto  $M$  que contenga todas las posiciones y velocidades del péndulo, podremos analizar su movimiento a medida que transcurre el tiempo, enumerando cada instante de tiempo analizado. Así tendremos una fotografía para cada instante y cada fotografía dependerá de la anterior. Llamaremos a este conjunto espacio de fase. Además, al considerar una función  $\sigma : M \rightarrow M$  tal que si  $x \in M$  describe un estado en un instante  $t_0$ , entonces  $\sigma(x)$  describe el estado en el tiempo  $t_0 + 1$ ,  $\sigma^2(x)$  en  $t_0 + 2$ , y así sucesivamente.

Para estudiar el sistema, será de interés analizar las iteraciones sucesivas de  $\sigma$ . Lo anterior lo formalizaremos de la siguiente manera.

**Definición 1.1.** Un sistema dinámico  $(M, \sigma)$  es un espacio métrico compacto  $M$  junto con una función continua  $\sigma : M \rightarrow M$ . Si  $\sigma$  es un homeomorfismo, diremos que  $(M, \sigma)$  es un sistema dinámico invertible.

### 1.1.1.

## Dinámica Simbólica

La dinámica simbólica es una rama de los sistemas dinámicos, se originó como método para estudiar sistemas dinámicos generales, esto se realizó mediante la discretización tanto del espacio como del tiempo. La idea es particionar el espacio de fase en un número finito de conjuntos y hacer un seguimiento de en qué conjunto se encuentra el estado del sistema en cada instante de tiempo. Cada conjunto está asociado con un símbolo y de esta manera se describe la evolución del sistema mediante una secuencia infinita de símbolos. Esto da lugar a un sistema dinámico "simbólico" que refleja y nos ayuda a comprender el comportamiento dinámico del sistema original. Las técnicas e ideas han encontrado aplicaciones en el almacenamiento y transmisión de datos [2].

A continuación describiremos un tipo de sistema dinámico llamado espacio de shift.

## 1.2

### Espacios de shift

Primero comenzaremos con un conjunto de símbolos  $\mathcal{A}$  que llamaremos *alfabeto*, para nuestros fines este conjunto será finito. Consideremos una secuencia bi-infinita de símbolos de  $\mathcal{A}$ , la cual denotaremos como  $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  y gráficamente en una dimensión se pueden representar de la forma

$$x = \dots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2 \dots$$

Dada una secuencia bi-infinita  $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  y enteros  $i \leq j$ , denotaremos una sección de la secuencia bi-infinita por

$$x_{[i,j]} = x_i x_{i+1} \dots x_{j-1} x_j.$$

Si pensamos solo en una secuencia infinita hacia la derecha, la denotaremos por

$$x_{[i,\infty)} = x_i x_{i+1} x_{i+2} \dots$$

de forma análoga para las secuencias infinitas a la izquierda. Las secuencias finitas de la forma  $x_{[i,j]}$  las llamaremos *palabras*.

**Definición 1.2.** Si  $\mathcal{A}$  es un alfabeto finito, entonces un *full  $\mathcal{A}$ -shift*, o *full shift* es la colección de todas las secuencias bi-infinitas de símbolos de  $\mathcal{A}$ . Los *full shift* se denotarán por

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} : x_i \in \mathcal{A} \quad \forall i \in \mathbb{Z}\}$$

**Definición 1.3.** Dado un alfabeto  $\mathcal{A}$ , el conjunto de palabras de largo  $n$  lo denotaremos  $\mathcal{A}^n$ . El conjunto de palabras sobre  $\mathcal{A}$  se denota

$$\mathcal{A}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n$$

La palabra de largo cero (en este trabajo  $0 \in \mathbb{N}$ ), es decir, la palabra asociada a la función con dominio vacío, la denotamos por  $\varepsilon$ .

Como queremos estudiar la dinámica de las secuencias bi-infinitas de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , definiremos una aplicación que llamaremos *shift*.

**Definición 1.4.** El shift es la aplicación  $\sigma$ , dada por

$$\begin{aligned} \sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} &\longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \\ \sigma(x)_i &= x_{i+1} \end{aligned}$$

Dada una secuencia bi-infinita  $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , al aplicar el shift de manera sucesiva podremos observar si la secuencia tiene algún tipo de regularidad dinámica, esto motiva la definición de órbita de una secuencia bi-infinita bajo  $\sigma$ .

**Definición 1.5.** Dada una secuencia bi-infinita  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , la órbita de  $x$  bajo  $\sigma$  se define como

$$\text{Orb}_{\sigma}(x) = \{\sigma^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$$

Una secuencia bi-infinita  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , se dice periódica por  $\sigma$ , si  $\sigma^n(x) = x$  para algún  $n \geq 1$ , diremos que  $x$  tiene periodo  $n$  bajo  $\sigma$ . Sí  $\sigma(x) = x$ , entonces llamaremos a  $x$  punto fijo por  $\sigma$ .

### 1.2.1.

#### Topología de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$

Una manera de definir la topología de  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , es considerar  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  como espacio métrico al definir la distancia entre dos secuencias bi-infinitas  $x, y \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , como

$$d(x, y) = 2^{-\inf\{|n| : n \in \mathbb{Z}, x_n \neq y_n\}}$$

**Observación 1.6.** Notemos que la métrica descrita anteriormente es una ultramétrica. Los abiertos proporcionados por la distancia anterior inducen la topología prodiscreta en el espacio  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ . En otras palabras, la topología producto inducida por la topología

discreta de  $\mathcal{A}$ . Tendremos que la base de esta topología está dada por los cilindros. Dado  $F \subset \mathbb{Z}$  finito y  $p \in \mathcal{A}^F$  el cilindro dado por  $p$  es

$$[p] = \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : x|_F = p\}$$

A la función  $p$  se le denomina *patrón*. Notemos que en particular toda palabra es un patrón. Con lo anterior tendremos que  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  es un espacio compacto como consecuencia del teorema de Tychonoff. Además, la función definida en 1.4 es continua y, por tanto, el par  $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$  es un sistema dinámico.

Ahora estudiaremos los subconjuntos del full shift que preservan la dinámica del shift y que, por lo tanto, inducen nuevos sistemas dinámicos.

**Definición 1.7.** Diremos que  $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  es un *subshift* si es cerrado bajo la topología prodiscreta y  $\sigma$ -invariante.

Notemos que el conjunto vacío  $\emptyset$  y el full shift  $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  son ejemplos triviales de subshifts. A continuación daremos algunos ejemplos adicionales

**Ejemplo 1.8.** Dado  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ ,  $\overline{Orb_{\sigma}(x)}$  es un subshift.

**Ejemplo 1.9.** Consideremos  $X \subset \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  tal que

$$X = \{x \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} : \forall m \in \mathbb{Z}, \text{ si } x_m = 1 \Rightarrow x_{m+1} = 0\}$$

El espacio  $X$  es claramente  $\sigma$ -invariante, argumentemos que es cerrado. Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  con  $x_n \in X$  tal que  $x_n \rightarrow y$  con  $y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ . Supongamos que existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $y_m = 1$ , sea  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $\forall n \geq N$   $y_m = (x_n)_m$  y  $y_{m+1} = (x_n)_{m+1}$ , luego  $\forall n \geq N$ ,  $(x_n)_m = 1$ , como  $x_n \in X$ , se tiene que  $(x_n)_{m+1} = 0$ , por tanto,  $y_{m+1} = 0$ .

**Teorema 1.10.** Un conjunto  $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  es un subshift si y solamente si existe un conjunto de palabras prohibidas  $\mathcal{F} = \{p_i\}_{i \in I}$  tal que

$$X = X_{\mathcal{F}} := \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \setminus \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ i \in I}} \sigma^m([p_i])$$

*Demostración.* Sea  $\mathcal{F} = \{p_i\}_{i \in I}$  y consideremos

$$X_{\mathcal{F}} = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \setminus \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ i \in I}} \sigma^m([p_i])$$

Notemos que  $\sigma^m([p_i])$  es abierto para todo  $m \in \mathbb{Z}$ , entonces

$$\bigcup_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ i \in I}} \sigma^m([p_i])$$

es abierto, por tanto,  $X_{\mathcal{F}}$  es cerrado. Además,

$$\begin{aligned} \sigma(X_{\mathcal{F}}) &= \sigma(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}) \setminus \sigma\left(\bigcup_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ i \in I}} \sigma^m([p_i])\right) \\ &= \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \setminus \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ i \in I}} \sigma^{m+1}([p_i]) \\ &= X_{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, obtenemos que  $X_{\mathcal{F}}$  es un subshift.

Ahora, si  $X$  es un subshift, entonces  $X$  es cerrado, por tanto, existe un abierto  $\mathcal{U}$  tal que

$$X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \setminus \mathcal{U}$$

Como los cilindros son base,

$$\mathcal{U} = \bigcup_{i \in I} [p_i].$$

Todo cilindro puede escribirse como unión de cilindros dados por palabras. En efecto, dado  $p \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  basta tomar como soporte la envoltura convexa  $\text{conv}(F)$  de  $F$  y tenemos que  $[p]$  se escribe como la unión de los  $[w]$  donde  $w: \text{conv}(F) \rightarrow \mathcal{A}$  y  $w|_F = p$ . Luego, supondremos sin pérdida de generalidad que los  $p_i$  son palabras.

De lo anterior se sigue que

$$X = \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \setminus \bigcup_{i \in I} [p_i]$$

Además  $X$  es  $\sigma$ -invariante, por tanto,

$$\begin{aligned} X &= \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \setminus \bigcup_{i \in I} [p_i] \\ &= \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \setminus \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ i \in I}} \sigma^m([p_i]) \end{aligned}$$

De donde obtenemos que  $X = X_{\mathcal{F}}$  para la colección  $\mathcal{F} = (p_i)_{i \in I}$ . ■

**Definición 1.11.** Un shift de tipo finito (SFT) es un subshift que se puede describir por un conjunto finito de palabras prohibidas, es decir,  $X = X_{\mathcal{F}}$  es un subshift con  $\mathcal{F}$  finito.

Notemos que el subshift definido en el ejemplo 1.9 se puede caracterizar a través de palabras prohibidas, donde  $\mathcal{F} = \{11\}$ , es decir, no existen dos símbolos 1 sucesivos en las secuencias de 1.9, además como el conjunto de palabras prohibidas es finito, se sigue que es un subshift de tipo finito. Luego podemos escribir

$$\begin{aligned} X &= \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} : \forall m \in \mathbb{Z}, \text{ si } x_m = 1 \Rightarrow x_{m+1} = 0\} \\ &= X_{\{11\}} \end{aligned}$$

El teorema anterior nos entrega una forma más amigable de estudiar los espacios de shift y una rápida visualización de los shift de tipo finito, la que es una estructura dinámica de interés, de hecho en [2] la definición 1.2.1 entrega la noción de espacio de shift a través de las palabras prohibidas.

Sean  $w \in \mathcal{A}^*$  y  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , diremos que  $w \sqsubset x$  ( $w$  es sub-palabra de  $x$ ) si existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $\sigma^n(x) \in [w]$ .

**Definición 1.12.** Sea  $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ , denotaremos por  $\mathcal{L}_n(X)$  al conjunto de todas las palabras de largo  $n$  de puntos  $x \in X$ , es decir

$$\mathcal{L}_n(X) = \{w \in \mathcal{A}^n : \text{ existe } x \in X \text{ tal que } w \sqsubset x\}.$$

El lenguaje de  $X$  es la colección

$$\mathcal{L}(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n(X).$$

**Ejemplo 1.13.** Consideremos  $X_{\{11\}}$  subshift definido en el ejemplo 1.9, el lenguaje de este subshift es de la forma

$$\{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 000, 001, 010, 100, 101, \dots\}.$$

Si analizamos la secuencia, notaremos que  $|\mathcal{L}_1(X_{\{11\}})| = 2$ ,  $|\mathcal{L}_2(X_{\{11\}})| = 3$ ,  $|\mathcal{L}_3(X_{\{11\}})| = 5$ , y más generalmente que se tiene que para  $n \geq 2$ ,

$$\mathcal{L}_n(X_{\{11\}}) = \mathcal{L}_{n-1}(X_{\{11\}}) + \mathcal{L}_{n-2}(X_{\{11\}}).$$

Es decir,  $|\mathcal{L}_n(X_{\{11\}})|$  sigue la sucesión de Fibonacci. Por esa razón que el subshift  $X_{\{11\}}$  es llamado en ocasiones subshift de Fibonacci (o golden mean shift) y denotado por  $X_{Fib}$ .

La siguiente proposición es elemental y se puede encontrar su prueba en [2]. Para conveniencia del lector, daremos un esquema de la prueba.

**Proposición 1.14.** Sea  $X$  un subshift y  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X)$  su lenguaje.

1. Si  $w \in \mathcal{L}$ , entonces
  - a) Toda subpalabra de  $w$  es una palabra de  $\mathcal{L}$ .
  - b) Existe  $u, v \in \mathcal{L}$  distintas de  $\epsilon$ , tal que  $u w v \in \mathcal{L}$ .
2. Los lenguajes de un subshift están caracterizados por (1). Es decir, si  $\mathcal{L}$  es una colección de palabras sobre  $\mathcal{A}$ , entonces  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X)$  para algún subshift  $X$  si y solo si  $\mathcal{L}$  satisface (1).
3. Los lenguajes de un subshift determinan los subshift. De hecho, para todo subshift  $X = \mathcal{X}_{\mathcal{L}(X)^c}$ . En conclusión, dos subshift son iguales si y solo si tienen el mismo lenguaje.

*Demostración.* Probaremos los tres enunciados.

1. Si  $w \in \mathcal{L}(X)$ , entonces  $w$  aparece en una secuencia  $x \in X$ , digamos  $w = x_{[i,j]}$  para algún  $i < j$ . Cada sub-palabra de  $w$  también aparece en  $x$ , por tanto, cada sub-palabra pertenece a  $\mathcal{L}(X)$ . Además, tomando  $u = x_{i-1}$  y  $v = x_{j+1}$  tenemos que  $u w v$  aparece en  $x$  pues  $u w v = x_{[i-1,j+1]}$ , por tanto,  $u w v \in \mathcal{L}(X)$ .
2. Consideremos  $\mathcal{L}$  una colección de palabras que satisfacen la condición 1 y sea  $X = \mathcal{X}_{\mathcal{L}^c}$ . Mostraremos que  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(X)$ , es claro que  $\mathcal{L}(X) \subset \mathcal{L}$ . Recíprocamente, consideremos  $w = x_0 x_1 \cdots x_m \in \mathcal{L}$  aplicando la condición 1(b) la cantidad de veces necesarias, podemos encontrar símbolos  $x_j$  con  $j > m$  y  $x_i$  con  $i < 0$  tal que  $x_i \cdots x_j \in \mathcal{L}$ . Por compacidad, iterar este proceso nos permite obtener una configuración  $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ . Por la condición 1(a), tendremos que cada sub-palabra de  $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$  pertenece a  $\mathcal{L}$ . Así  $x \in \mathcal{X}_{\mathcal{L}^c}$ , probando que  $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}(X)$ .
3. Si  $x \in X$ , ninguna palabra aparece en  $x$  está en  $\mathcal{L}(X)^c$ , ya que  $\mathcal{L}(X)$  contiene todas las palabras que aparecen en todos los puntos de  $X$ . Por lo tanto,  $x \in \mathcal{X}_{\mathcal{L}(X)^c}$ , mostrando que  $X \subset \mathcal{X}_{\mathcal{L}(X)^c}$ . Recíprocamente, dado que  $X$  es un espacio de shift, existe una colección  $\mathcal{F}$  tal que  $X = \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ . Si  $x \in \mathcal{X}_{\mathcal{L}^c}$ , entonces cada palabra en  $x$  debe estar en  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(\mathcal{X}_{\mathcal{F}})$  y, por lo tanto, no puede estar en  $\mathcal{F}$ . De este modo,  $x \in \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ , probando que  $X = \mathcal{X}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{X}_{\mathcal{L}(X)^c}$ .

■

**Observación 1.15.** Sea  $X$  un subconjunto del full shift. Entonces  $X$  es un subshift si y solo si para todo  $x \in X$  toda subpalabra  $w \sqsubset x$ , pertenece al lenguaje de  $X$ , es decir,  $w \in \mathcal{L}(X)$ . Ésto es equivalente a la condición (3) de la proposición 1.14.

**Definición 1.16.** Un subshift  $X$  es *irreducible* si para todo par de palabras ordenadas  $u, v \in \mathcal{L}(X)$  hay una palabra  $w \in \mathcal{L}(X)$  tal que  $uvw \in \mathcal{L}(X)$ .

Ahora definiremos una transformación en un subshift que agranda el tamaño del alfabeto. Las nuevas letras serán palabras de la forma  $x_{[i, i+k]}$  con  $k > 0$ . A este objeto se le denomina shift de palabras superiores, el cual proporciona una descripción alternativa del mismo espacio de shift (en términos formales, da un sistema topológicamente conjugado al original).

Sea  $X$  un espacio de shift sobre un alfabeto  $\mathcal{A}$ . Denotaremos por  $\mathcal{A}_X^{[n]} = \mathcal{L}_n(X)$  al conjunto de palabras de largo  $n$  en  $X$ . Consideremos  $\mathcal{A}_X^{[n]}$  como alfabeto del full-shift  $(\mathcal{A}^{[n]})^{\mathbb{Z}}$ , además definimos el código  $n$ -ésimo de palabras superiores

$$\beta_n: X \rightarrow (\mathcal{A}^{[n]})^{\mathbb{Z}}$$

tal que

$$(\beta_n(x))_{[i]} = x_{[i, i+n-1]}$$

**Definición 1.17.** Sea  $X$  un espacio de shift, el espacio de shift  $n$ -ésimo de palabras superiores  $X^{[n]}$ , es la imagen del código  $n$ -ésimo de palabras superiores, es decir,  $X^{[n]} = \beta_n(X)$  en el full-shift  $(\mathcal{A}^{[n]})^{\mathbb{Z}}$

Notemos que en los términos consecutivos de  $(\mathcal{A}^{[n]})^{\mathbb{Z}}$  que se entregan en el código  $n$ -ésimo de palabras superiores se superponen.

**Ejemplo 1.18.** Sea  $X$  el subshift definido en el ejemplo 1.9, entonces el alfabeto de  $X^{[2]}$  es,

$$\mathcal{A}_X^{[2]} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

El conjunto de palabras prohibidas  $\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ , pues el shift  $n$ -ésimo de palabras superiores superpone palabras de largo dos y al concatenar no coinciden el segundo término que la primera letra con el primer término de la segunda letra.

La siguiente proposición muestra que el espacio de shift  $n$ -ésimo de palabras superiores de un espacio de shift es un espacio de shift. La prueba de esta proposición la podemos encontrar en 1.4.3 de [2].

**Proposición 1.19.** El espacio de shift  $n$ -ésimo de palabras superiores de un espacio de shift, es un espacio de shift.

Como ya tenemos formas equivalentes de analizar un espacio de shift, es importante introducir las nociones de morfismo entre los espacios de shift.

**Definición 1.20.** Consideremos  $X$  e  $Y$  dos subshift. Una función  $\varphi: X \rightarrow Y$  continua tal que

$$\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi$$

se dice morfismo entre  $X$  e  $Y$ .

- Si  $\varphi$  es sobreyectiva, diremos que es un factor.
- Si  $\varphi$  es inyectiva, diremos que es un encaje.
- Si  $\varphi$  es biyectiva, diremos que es una conjugación topológica.

## 1.2.2.

### Tipos de Subshift

Como vimos en el teorema 1.10 los espacios de shift pueden ser descritos por conjuntos de palabras prohibidas y si este conjunto era finito, entonces el subshift lo llamaríamos de tipo finito. No obstante, existen más caracterizaciones para los subshift de tipo finito y de otros tipos de subshift como los de tipo sóficos y efectivos.

**Definición 1.21.** Un shift de tipo finito es  $M$ -step o (de memoria  $M$ ), si se puede describir por una colección de palabras prohibidas, las cuales tiene largo  $M + 1$ .

Una motivación a la definición anterior es la siguiente: si en el conjunto de palabras prohibidas de un subshift de tipo finito existe una palabra de largo  $M + 1$ ; Una máquina que lee las palabras de izquierda a derecha necesitará  $M$  lecturas previas para identificar si una palabra  $u$  de largo  $n \geq M$  contiene una palabra prohibida. Esto se verá justificado más adelante cuando introduzcamos los autómatas finitos deterministas.

**Proposición 1.22** (Proposición 2.1.7 [2]). Si  $X$  es una subshift de tipo finito, entonces existe  $M \geq 0$  tal que  $X$  es de memoria  $M$ .

El lenguaje de un subshift de tipo finito se caracteriza por la propiedad de, si dos palabras se superponen lo suficiente, entonces se pueden unir a lo largo de su superposición para formar otra palabra en el lenguaje.

**Teorema 1.23** (Teorema 2.1.8 de [2]). *Un espacio de shift  $X$  es un subshift de tipo finito de memoria  $M$  si y solo si, para toda palabra tal que  $|v| \geq M$ , para todo par de palabras  $u, w$ , tal que las concatenaciones  $uv, vw \in \mathcal{L}(X)$ , entonces  $uvw \in \mathcal{L}(X)$ .*

El teorema anterior es una herramienta útil para probar cuando un subshift no es de tipo finito, a esta herramienta se denomina teorema de palabras sincronizantes.

**Ejemplo 1.24.** Consideremos el subshift  $X \subset \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  tal que entre dos símbolos 1 hay una cantidad par de símbolos 0, es decir,

$$X = X_{\{10^{2n+1}1 : n \geq 0\}}$$

Notemos que el conjunto de palabras prohibidas a priori no es finito, de hecho mostraremos que no se puede describir a través de un conjunto finito de palabras prohibidas, es decir, no es un subshift de tipo finito. Para esto consideremos  $m \geq 1$  y  $v = 0^{2m+1}$ , entonces las concatenaciones  $10^{2m+1}$  y  $0^{2m+1}1 \in \mathcal{L}(X)$ , pero  $10^{2m+1}1 \notin \mathcal{L}(X)$ .

Al subshift anterior se conoce como *Even shift*.

**Definición 1.25.** A un subshift  $Y \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  le diremos sófico si existe  $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  SFT y un morfismo  $\phi$  factor tal que  $\phi: X \rightarrow Y$ .

Como ya hemos mostrado que even shift no es de tipo finito, ahora demostraremos que es de tipo sófico.

**Ejemplo 1.26.** Consideramos  $X_{\{11\}}^{[2]}$  que es de tipo finito y  $X_{\{10^{2n+1}1:n \geq 0\}}$  even shift, consideremos el morfismo  $\phi: X_{\{11\}}^{[2]} \rightarrow X_{\{10^{2n+1}1:n \geq 0\}}$  tal que para  $x \in X_{\{11\}}^{[2]}$

$$\phi(x)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } x_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ 0 & \text{si } x_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ o } x_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Notemos que  $\phi$  es factor, por tanto,  $X_{\{10^{2n+1}1:n \geq 0\}}$  es un subshift de tipo sófico.

Una forma distinta de definir los shift de tipo sófico es a través de un criterio respecto a las palabras que pueden seguir a la derecha de otra.

**Definición 1.27.** Sea  $X$  un espacio de shift y  $w \in \mathcal{L}(X)$ . El conjunto de seguidores a la derecha de  $w$  en  $X$  denotado por  $\mathcal{F}_X(w)$ , es el conjunto de todas las palabras  $v \in \mathcal{L}(X)$  que pueden seguir de  $w \in \mathcal{L}(X)$ , es decir,

$$\mathcal{F}_X(w) = \{v \in \mathcal{L}(X) : wv \in \mathcal{L}(X)\}$$

La colección de todos los conjuntos de seguidores a la derecha de  $X$ , la denotaremos por

$$\mathcal{C}_X = \{\mathcal{F}_X(w) : w \in \mathcal{L}(X)\}$$

**Teorema 1.28** (Teorema 3.2.10 de [2]). *Un subshift  $X$  es de tipo s3fico si y solo si la cantidad de conjuntos de seguidores a la derecha es finito, es decir,  $|C_X|$  es finito.*

**Ejemplo 1.29.** Consideremos el subshift  $X$  definido en 1.24 el cual ya mostramos que es de tipo s3fico en el ejemplo 1.26, entonces debe tener una cantidad finita de seguidores a la derecha, los cuales son 3. En efecto, para  $w \in \mathcal{L}(X)$ , se tiene

$$\mathcal{F}_X(w) = \begin{cases} \mathcal{F}_X(0) & \text{Si } w \text{ no contiene el s3mbolo } 1, \\ \mathcal{F}_X(1) & \text{Si } w \text{ termina en } 10^{2k} \text{ para alg3n } k \geq 0, \\ \mathcal{F}_X(10) & \text{Si } w \text{ termina en } 10^{2k+1} \text{ para alg3n } k \geq 0. \end{cases}$$

El Teorema 1.10 nos permite definir los espacios de secuencias bi-infinitas a trav3s de sus palabras prohibidas. Si consideramos el conjunto de palabras prohibidas, recursivamente enumerable (en la secci3n de calculabilidad encontraremos la definici3n de m3quina de Turing y de conjunto recursivamente enumerable), obtenemos una nueva estructura din3mica.

**Definici3n 1.30.** Un subshift  $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  se dice *efectivo* si puede ser definido por un conjunto de patrones prohibidos que es recursivamente enumerable, es decir, que es enumerado por una m3quina de Turing.

### 1.2.3.

## Grafos de espacios de shift

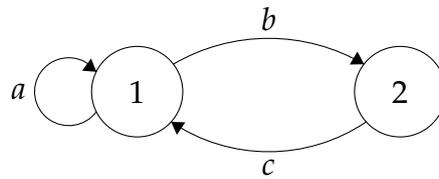
Los grafos son una herramienta matem3tica que permite representar visualmente las relaciones entre objetos. Estos necesitan un conjunto de v3rtices y otro conjunto de arcos o aristas que conectan los v3rtices, los grafos pueden tener una direcci3n determinada o no.

**Definici3n 1.31.** Un grafo  $G$  es un conjunto finito de v3rtices  $\mathcal{V}(G)$  y un conjunto finito de aristas o arcos  $\mathcal{E}(G)$  y dos funciones  $i: \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{V}(G)$ ,  $t: \mathcal{E}(G) \rightarrow \mathcal{V}(G)$ .

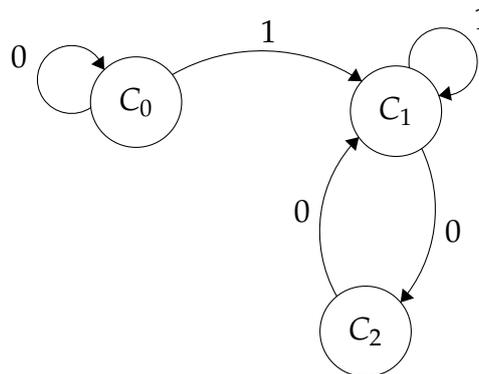
La interpretaci3n es que todo arco  $e \in \mathcal{E}(G)$  inicia en el v3rtice  $i(e)$  y termina en el v3rtice  $t(e)$ . Usualmente las funciones  $i, t$  las representaremos visualmente con flechas entre los v3rtices.

Dado un grafo  $G$  con v3rtices  $\mathcal{V}(G)$ , denotaremos  $A_{IJ}$  a la cantidad de aristas o arcos de un v3rtice  $I \in \mathcal{V}(G)$  a un otro  $J \in \mathcal{V}(G)$ .

**Ejemplo 1.32.** Consideremos el grafo  $G$  con conjunto de v3rtices  $\mathcal{V}(G) = \{1, 2\}$  y conjunto de aristas  $\mathcal{E}(G) = \{a, b, c\}$  tal que



**Ejemplo 1.33.** Consideremos el grafo  $G_1$  con conjunto de vértices  $\mathcal{V}(G_1) = \{C_0, C_1, C_2\}$  y conjunto de aristas  $\mathcal{E}(G_1) = \{0, 1\}$  tal que



**Definición 1.34.** Dado un grafo  $G$  con vértices  $\mathcal{V}(G)$ , Llamaremos matriz de adyacencia de un grafo  $G$  a la matriz con la cantidad de aristas o arcos de un vértice  $I \in \mathcal{V}(G)$  a un otro  $J \in \mathcal{V}(G)$  para todo  $I, J \in \mathcal{V}(G)$ . Denotaremos  $A_G$  a la matriz de adyacencia de un grafo  $G$ . En un grafo llamaremos a un vértice  $I \in \mathcal{V}(G)$  estancado, si no comienzan aristas en  $I$  o no terminan aristas en  $I$ , entonces diremos que un grafo es esencial si no posee vértices estancados.

La matriz de adyacencia de un grafo es una herramienta que proporciona información de las conexiones de los vértices del grafo, la cual será de importancia para estudiar propiedades de los espacios de shift.

**Ejemplo 1.35.** La matriz de adyacencia del grafo  $G$  representado en 1.32 es de la forma

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de adyacencia para el grafo  $G_1$  representado en 1.33 es

$$A_{G_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notemos que las matrices de adyacencia  $A_G$  y  $A_{G_1}$  son esenciales, pues no poseen vértices estancados, además no tienen ni filas ni columnas de 0.

Así como un grafo induce una matriz de adyacencia, también existe una noción de grafo asociado a una matriz no negativa.

**Definición 1.36.** Sea  $A = [A_{IJ}]_{1 \leq I, J \leq n}$  una matriz con entradas enteras no negativas de tamaño  $n \times n$ . El grafo asociado a  $A$  es el grafo  $G = A(G) = G_A$ , donde el conjunto de vértices  $\mathcal{V}(G) = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ , y la entrada  $A_{IJ}$  denota la cantidad de aristas que inician en el vértice  $I$  y termina en el vértice  $J$ .

**Definición 1.37.** Un camino  $\pi = e_1 e_2 \dots e_n$  en un grafo  $G$  es una colección finita de arcos  $e_i \in \mathcal{E}(G)$  tal que  $t(e_i) = i(e_{i+1})$  para  $1 \leq i \leq n - 1$ , el largo es el número de arcos de la secuencia finita, es decir, sí  $\pi = e_1 e_2 \dots e_n$ , entonces  $|\pi| = n$ . Un ciclo es un camino que comienza y termina en el mismo vértice del grafo, Además, para cada vértice  $I \in G$  existe la palabra vacía  $e_I$  de largo cero, que comienza y termina en el mismo vértice.

**Definición 1.38.** Sea  $G$  un grafo con conjunto de aristas  $\mathcal{E}(G)$ . El shift de arcos  $X_G$  de un grafo  $G$ , es el shift sobre el alfabeto  $\mathcal{A} = \mathcal{E}(G)$  definido por

$$X_G = \{ \xi = (\xi_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{E}(G)^{\mathbb{Z}} : i(\xi_i) = t(\xi_{i+1}), \text{ para todo } i \in \mathbb{Z} \}$$

En otras palabras, el shift de arcos de un grafo  $G$  representa el espacio de caminos bi-infinitos en  $G$ .

**Proposición 1.39** (Proposición 2.2.6 [2]). Si  $G$  es un grafo con matriz de adyacencia  $A$ , entonces el shift de arcos  $X_G$  es un shift de tipo finito de memoria 1.

*Demostración.* El shift de caminos  $X_G$  es de tipo finito, pues podemos considerar como alfabeto  $\mathcal{A} = \mathcal{E}(G)$  y conjunto de palabras prohibidas,  $\mathcal{F} = \{ef : e, f \in \mathcal{A}, t(e) \neq i(f)\}$  un conjunto de palabras de largo 2, luego por la definición 1.38 tenemos que toda secuencia  $\xi \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  esta en  $X_G$  cuando ninguna palabra pertenece a  $\mathcal{F}$ , entonces  $X_G = X_{\mathcal{F}}$ , por tanto,  $X_G$  es un shift de tipo finito y como las palabras prohibidos son de largo 2, tenemos que  $X_G$  es de memoria 1. ■

**Proposición 1.40** (Proposición 2.2.10 de [2]). Dado un grafo  $G$ , entonces existe un único subgrafo  $\mathcal{H}$  esencial tal que

$$X_G = X_{\mathcal{H}}$$

La prueba de la proposición anterior consiste en definir como subgrafo  $\mathcal{H}$  al grafo con conjunto de arcos  $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \mathcal{E}(G)$  y conjunto de vértices  $\mathcal{V}(\mathcal{H}) = \{i(e) : e \in \mathcal{E}(\mathcal{H})\}$ , es decir todos los vértices que son inicio de un arco en  $\mathcal{E}(G)$ , con lo anterior se tiene un subgrafo donde todo camino bi-infinito en  $X_G$  ahora es un camino bi-infinito en  $X_{\mathcal{H}}$ . Esta proposición nos sirve para reducir la matriz de adyacencia quitando las filas o columnas asociadas a los puntos estancados de un grafo  $G$  y así obtener una matriz

esencial reducida de un subgrafo  $\mathcal{H}$  que representara el mismo espacio de shift de arcos del grafo  $G$ .

Diremos que un grafo  $G$  es irreducible si para todo par de vértices  $I, J \in \mathcal{V}(G)$ , existe al menos un camino  $\pi$  que comienza en el vértice  $I$  y termine en el vértice  $J$ .

**Proposición 1.41** (Proposición 2.2.14 de [2]). Un grafo esencial es irreducible si y solo si el shift de arcos asociado al grafo es irreducible.

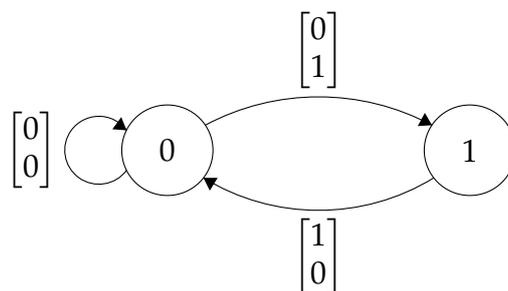
*Demostración.* Sea  $G$  un grafo irreducible, y  $\pi, \tau \in \mathcal{L}(X_G)$  tal que  $\pi$  termina en un vértice  $I$  y  $\tau$  comienza en un vértice  $J$ . Dado que  $G$  es irreducible, existe un camino  $\omega \in \mathcal{L}(X_G)$  entre  $I$  y  $J$ . Entonces  $\pi\omega\tau$  es un camino en  $G$  tal que  $\pi\omega\tau \in \mathcal{L}(X_G)$ .

Ahora supongamos que  $G$  es esencial, y que  $X_G$  es un shift irreducible. Sea  $I, J$  vértices de  $G$ , dado que  $G$  es esencial, existen aristas  $e$  y  $f$  tal que  $e$  termina en  $I$  y  $f$  comienza en  $J$ . Como  $X_G$  es un shift irreducible, se tiene que existe una palabra  $\omega$  tal que  $e\omega f \in \mathcal{L}(X_G)$ , entonces  $\omega$  es un camino en  $G$  de  $I$  hasta  $J$ , por tanto,  $G$  es un grafo irreducible. ■

De las proposiciones anteriores, se puede deducir el siguiente teorema que muestra que los shift de tipo finito pueden siempre representarse mediante shifts de arcos.

**Teorema 1.42** (Teorema 2.3.2 de [2]). Si  $X$  es un shift de tipo finito de memoria  $M$ , entonces existe un grafo  $G$  tal que  $X^{[M+1]} = X_G$ .

**Ejemplo 1.43.** Consideremos el shift de Fibonacci definido en 1.9 el cual es un subshift de tipo finito de memoria 1, por tanto, shift 2-ésimo de palabras superiores  $X_{11}^{[2]} = X_G$ , donde el grafo  $G$  tiene conjunto de vértices  $\mathcal{V}(G) = \{0, 1\}$  y conjunto de aristas como en la imagen siguiente:



Con matriz de adyacencia

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 1.3

### Entropía

Como los espacios de shift están determinados por el lenguaje que generan, entonces es interesante analizar el crecimiento del conjunto de palabras de largo  $n$  del shift. Este crecimiento lo podemos interpretar en términos de teoría de información para dar una medida de que tan complejo es el shift. Notemos la siguiente desigualdad.

$$|\mathcal{L}_n(X)| \leq |\mathcal{A}|^n$$

$$\frac{1}{n} \log(|\mathcal{L}_n(X)|) \leq \log(|\mathcal{A}|)$$

**Definición 1.44.** La *entropía topológica* de un subshift  $X \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$  es el número real no negativo dado por

$$h_{top}(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(|\mathcal{L}_n(X)|)$$

A priori, el límite en la definición 1.44 podría no converger. A continuación mostraremos que de hecho el límite siempre existe y es debido a que en los espacios de shift la secuencia  $(\log(|\mathcal{L}_n(X)|))_{n \in \mathbb{N}}$  es subaditiva.

**Definición 1.45.** Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una secuencia de números reales, diremos que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es subaditiva, si

$$a_{m+n} \leq a_m + a_n, \forall m, n \in \mathbb{N}$$

El lema de Fekete (ver por ejemplo Lema 4.1.7 de [2]) muestra que dada una secuencia subaditiva  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la secuencia  $(\frac{a_n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge y es iguala su ínfimo  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$ , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$$

Dado que  $(\log(|\mathcal{L}_n(X)|))_{n \in \mathbb{N}}$  es subaditiva, tendremos que la entropía está bien definida y es un valor de importancia para los espacios de shift.

**Proposición 1.46** (Proposición 4.1.9 de [2]). Si  $Y$  es un factor de  $X$ , entonces  $h_{top}(Y) \leq h_{top}(X)$ .

La prueba consiste en mostrar que a través de un morfismo se tiene que  $|\mathcal{L}_n(Y)| \leq |\mathcal{L}_{n+k}(X)|$  para algún  $k > 0$  y con lo anterior podemos hacer manejo algebraico de

límites para mostrar lo pedido. La primera parte utiliza el teorema de Curtis-Lyndon-Hedlund [3] que caracteriza los morfismos mediante “códigos de ventana deslizante”.

**Corolario 1.47.** Sí  $X \cong Y$ , entonces  $h_{top}(X) = h_{top}(Y)$ . En particular, la entropía es una invariante de conjugación topológica.

La siguiente proposición nos permite relacionar el número de palabras de largo  $n$  del shift de arcos  $X_G$  con la suma de las entradas de la matriz de adyacencia  $(A^n)_{IJ}$ . Con esto tendremos el inicio de una técnica para encontrar la entropía de subshifts de tipo finito y sófico.

**Proposición 1.48** (Proposición 2.2.12 de [2]). Sea  $G$  un grafo con matriz de adyacencia  $A_G$  y  $m \geq 0$ .

1. El número de caminos de largo  $m$  de un vértice  $I$  a un vértice  $J$  es  $(A^m)_{IJ}$ , es decir, la posición  $(I, J)$  de  $A^m$ .
2. El número de ciclos de largo  $m$  en  $G$  es  $tr(A^m)$ , la traza de  $A^m$  y es igual al número de puntos en  $X_G$  con periodo  $m$ .

**Proposición 1.49** (Proposición 4.2.1 de [2]). Sea  $A \neq 0$  una matriz no negativa con un vector propio positivo, entonces el valor propio correspondiente es positivo  $\lambda > 0$  y existen constantes positivas  $c_0, d_0$  tal que

$$c_0\lambda^n \leq \sum_{I,J=1}^r (A^n)_{IJ} \leq d_0\lambda^n$$

Por lo tanto, si  $G$  es un grafo con matriz de adyacencia  $A$ , se tiene que  $h_{top}(X_G) = \log(\lambda)$ .

*Demostración.* Primero consideremos  $A$  una matriz no negativa, supongamos que  $A$  no es la matriz nula, entonces si  $A$  tiene un vector propio positivo  $v$ , se tiene que  $(Av)_I > 0$  para todo  $I$ , y si  $\lambda$  es el vector propio de  $v$ , se tiene que  $\lambda v_I > 0$ , pues  $v$  es un vector positivo, por tanto,  $\lambda > 0$ .

Notemos además que para todo  $I$

$$\sum_{J=1}^r (A^n)_{IJ} v_J = \lambda^n v_I$$

Sí, consideramos  $c = \min\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  y  $d = \max\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ , se tiene que para todo  $I$

$$c\lambda^n \leq \sum_{J=1}^r (A^n)_{IJ} v_J \leq d \sum_{J=1}^r (A^n)_{IJ} \leq d \sum_{I,J=1}^r (A^n)_{IJ}$$

Dividiendo por  $d$ , tenemos

$$\frac{c}{d}\lambda^n \leq \sum_{I,J=1}^r (A^n)_{IJ}$$

Luego considerando  $c_0 = \frac{c}{d}$ , tenemos

$$c_0\lambda^n \leq \sum_{I,J=1}^r (A^n)_{IJ}$$

La otra desigualdad se puede obtener de notar que

$$c \sum_{J=1}^r (A^n)_{IJ} \leq \sum_{J=1}^r (A^n)_{IJ} v_J \leq d\lambda^n$$

Luego al sumar sobre  $I$ , se tiene

$$c \sum_{I,J=1}^r (A^n)_{IJ} \leq d \sum_{I=1}^r \lambda^n$$

Obteniendo

$$\sum_{I,J=1}^r (A^n)_{IJ} \leq \frac{dr}{c}\lambda^n$$

Al considerar  $d_0 = \frac{dr}{c}$ , concluimos que

$$c_0\lambda^n \leq \sum_{I,J=1}^r (A^n)_{IJ} \leq d_0\lambda^n$$

Para finalizar solo queda notar que  $|\mathcal{L}_n(X_G)| = \sum_{I,J=1}^r (A^n)_{IJ}$ , entonces al aplicar logaritmo, dividir por  $n$  y considerar el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , concluimos que

$$h_{top}(X_G) = \log(\lambda).$$

■

**Ejemplo 1.50.** La entropía del ejemplo 1.9 es  $h_{top}(X_G) = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ .

Ahora entregaremos una definición de matrices irreducibles y esenciales que es análoga a la definición de grafos irreducibles y esenciales.

**Definición 1.51.** Una matriz no negativa  $A$  es irreducible si, para cada par ordenado de índices  $(I, J)$ , existe algún  $n \geq 0$  tal que  $A_{IJ}^n > 0$ . Adoptamos la convención de que para cualquier matriz  $A^0 = I$ , y, por lo tanto, la matriz de tamaño  $1 \times 1$ ,  $[0]$  es irreducible. Una matriz no negativa  $A$  es esencial si ninguna de sus filas o columnas es cero.

Dado que la potencia cero de cualquier matriz es la matriz identidad, la matriz  $1 \times 1$   $[0]$  es irreducible. Con esta única excepción, una matriz irreducible no puede contener ninguna fila o columna de ceros (es decir, es esencial). Para el siguiente teorema consideraremos una matriz  $A$  no negativa irreducible. Además, un valor propio real  $\lambda$  de  $A$  es geoméricamente simple si su espacio propio asociado es unidimensional y es algebraicamente simple si es una raíz simple del polinomio característico de  $A$ . Recordemos que la simplicidad algebraica implica la simplicidad geométrica.

**Teorema 1.52** (Teorema 4.2.3 de [2]). *Sea  $A \neq 0$  una matriz irreducible. Entonces,  $A$  tiene un vector propio positivo  $V_A$  con un valor propio correspondiente  $\lambda_A > 0$  que es tanto geométrica como algebraicamente simple. Si  $\mu$  es otro valor propio para  $A$ , entonces  $|\mu| \leq \lambda_A$ . Además, otro vector propio positivo para  $A$  es un múltiplo positivo de  $V_A$ . El valor propio  $\lambda_A$  lo llamaremos valor propio de Perron.*

Si  $X$  es un shift de tipo finito irreducible, entonces es conjugado a un shift de arcos con una matriz de adyacencia irreducible  $A$ . A continuación mostraremos que  $h_{top}(X) = \log \lambda_A$  y daremos también un método para calcular la entropía de los shift irreducibles de tipo sófico.

**Teorema 1.53** (Teorema 4.3.1 de [2]).

- 1) Si  $G$  es un grafo irreducible, entonces  $h_{top}(X_G) = \log \lambda_{A_G}$ .
- 2) Si  $X$  es un shift de tipo finito irreducible de memoria  $M$  y  $G$  es el grafo esencial para el cual  $X^{[M+1]} = X_G$ , entonces  $h_{top}(X) = \log(\lambda_{A_G})$ .

*Demostración.* Si  $G$  es un grafo irreducible, entonces su matriz de adyacencia  $A$  es irreducible. El teorema 1.52, muestra que  $A$  tiene un vector propio positivo con valor propio positivo  $\lambda_A$ . Luego, por la proposición 1.49, tenemos (1).

Notemos que  $X \cong X^{[M+1]}$  y la entropía es invariante bajo conjugación, entonces  $h_{top}(X) = h_{top}(x^{[M+1]}) = h_{top}(X_G)$ , además como  $X$  es irreducible, entonces  $A(G)$  también lo es y aplicando (1), tendremos (2). ■

En la sección 1.2.2 presentamos dos formas de representar un shift de tipo sófico, ahora entregaremos una representación dada por grafos, para así poder calcular la entropía de los espacios de shift sóficos. Para esto necesitamos la definición de grafo rotulado.

**Definición 1.54.** Un grafo rotulado  $\mathcal{G}$  es una par  $(G, \mathcal{R})$ , donde  $G$  es un grafo con aristas  $\mathcal{E}$  y un rotulador  $\mathcal{R} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{A}$  que asigna a cada arista  $e$  de  $G$  un rótulo  $\mathcal{R}(e)$  de un

alfabeto finito  $\mathcal{A}$ . El grafo subyacente de  $\mathcal{G}$  es  $G$ .

Un grafo rotulado es *irreducible*, si grafo subyacente es irreducible.

Recordemos que anteriormente definimos que era un camino en un grafo 1.37, entonces si  $\mathcal{G} = (G, \mathcal{R})$  un grafo rotulado, podremos utilizar  $\mathcal{R}$  para rotular estos caminos, es decir, si  $\pi = e_1 e_2 \cdots e_n$  un camino en  $G$ , un camino rotulado es de la forma

$$\mathcal{R}(\pi) = \mathcal{R}(e_1)\mathcal{R}(e_2) \cdots \mathcal{R}(e_n),$$

que es un  $n$ -palabra sobre  $\mathcal{A}$ , y al que nos referiremos como una palabra etiquetada. Para cada camino vacío  $\epsilon_I$  en  $G$ , definimos  $\mathcal{R}(\epsilon_I) = \epsilon$ , la palabra vacía sobre  $\mathcal{A}$ . Si consideramos  $\xi = \cdots e_{-1}e_0e_1 \cdots$  un camino bi-infinito sobre  $G$ , tal que  $\xi$  pertenezca al shift de arcos  $X_G$ , entonces un rotulado sobre el camino  $\xi$  es de la forma

$$\mathcal{R}_\infty(\xi) = \cdots \mathcal{R}(e_{-1})\mathcal{R}(e_0)\mathcal{R}(e_1) \cdots \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}.$$

El conjunto de todos rotulados de caminos bi-infinitos en  $G$ , lo denotaremos por

$$\begin{aligned} X_{\mathcal{G}} &= \{x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : x = \mathcal{R}_\infty(\xi) \text{ para todo } \xi \in X_G\} \\ &= \{\mathcal{R}_\infty(\xi) : \xi \in X_G\} \\ &= \mathcal{R}_\infty(X_G). \end{aligned}$$

Notemos que  $X_{\mathcal{G}}$  es un subconjunto del full  $\mathcal{A}$ -shift.

**Teorema 1.55** ([2]). *Un subconjunto  $X$  de un full shift es shift de tipo sófico si y solo si  $X = X_{\mathcal{G}}$  para algún grafo rotulado  $\mathcal{G}$ .*

Una presentación de un shift de tipo sófico  $X$  es un grafo etiquetado  $\mathcal{G}$  para el cual  $X_{\mathcal{G}} = X$ .

Dado que los subshift de tipo sófico pueden tener distintas presentaciones dadas por grafos rotulados con rotulados distintos, entregaremos una caracterización que nos permite encontrar un grafo rotulado con la menor cantidad de vértices y con importancia dinámica, a esta caracterización la llamaremos presentación resolvente a la derecha mínima. Para un grafo  $G$  con conjunto de aristas  $\mathcal{E}$ , el conjunto de aristas que inician en un vértice  $I$  lo denotaremos por  $\mathcal{E}_I$ .

**Definición 1.56.** Un grafo rotulado  $\mathcal{G} = (G, \mathcal{R})$  es resolvente a la derecha si para cada vértice  $I \in G$ , las aristas que inician en  $I$  tienen rotulados distintos, es decir,  $\mathcal{G}$  es resolvente a la derecha, si para todo vértice  $I$ , la restricción de  $\mathcal{R}$  en  $\mathcal{E}_I$  es uno a uno. Una presentación resolvente a la derecha de subshift de tipo sófico es un grafo rotulado resolvente a la derecha que presenta el subshift.

En el teorema 3.3.2 de [2] se muestra que todo subshift de tipo s3fico tiene una presentaci3n resolvente a la derecha.

**Proposici3n 1.57** (Proposici3n 4.1.13 de [2]). Sea  $\mathcal{G} = (G, \mathcal{R})$  un grafo rotulado resolvente a la derecha. Entonces  $h_{top}(X_{\mathcal{G}}) = h_{top}(X_G)$ .

**Teorema 1.58.** Sea  $X$  un shift de tipo s3fico irreducible y  $\mathcal{G} = (G, \mathcal{R})$  una presentaci3n resolvente a la derecha irreducible de  $X$ , entonces  $h_{top}(X) = \log(\lambda_{A_G})$ .

*Demostraci3n.* Por la proposici3n 1.57, se tiene  $h_{top}(X) = h_{top}(X_{\mathcal{G}}) = h_{top}(X_G)$ , adem3s,  $G$  es irreducible entonces podemos utilizar (1) de 1.53, concluyendo que  $h_{top}(X) = h_{top}(X_G) = \log(\lambda_{A_G})$ . ■

**Ejemplo 1.59.** Si consideramos el ejemplo 1.33 y la matriz de adyacencia  $A_{G_1}$  tendremos que la entropía topol3gica del even shift definido en 1.24 es  $h_{top}(X) = \log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ .

Las proposiciones y teoremas anteriores nos permiten calcular la entropía de shift de tipo finito y s3ficos irreducibles, pero si el shift no es irreducible de igual forma podremos calcular su entropía, para esto tendremos que notar que un grafo  $G$  contiene subgrafos  $G_i$  irreducibles, los que llamaremos componentes irreducibles de  $G$  y el estudio de  $X_G$  se reducirá a estudiar los shift de arcos de las componentes irreducibles  $X_{G_i}$ . Nuestro objetivo es reorganizar  $A$  renumerando sus estados de manera que asuma una forma triangular por bloques. Las matrices cuadradas  $A_i$  a lo largo de la diagonal ser3n los componentes irreducibles de  $A$ , y el crecimiento de  $A^n$  estar3 controlado por el crecimiento de  $A_i^n$ .

**Definici3n 1.60.** Sea  $A$  una matriz no negativa con componentes irreducibles  $A_1, \dots, A_k$ . El valor propio de Perron  $\lambda_A$  de  $A$  es

$$\lambda_A = \max_{1 \leq i \leq k} \lambda_{A_i}$$

**Lema 1.61.** Para una matriz no negativa arbitraria  $A$ , su valor propio de Perron  $\lambda_A$  es el valor propio m3s grande de  $A$ .

**Teorema 1.62** (Teorema 4.4.4 de [2]). Sea  $G$  un grafo con matriz de adyacencia  $A$ , entonces  $h(X_G) = \log(\lambda_A)$ .

**Definici3n 1.63.** Un n3mero real  $\lambda \geq 1$  es un n3mero de Perron, si es un entero algebraico que domina estrictamente a los dem3s conjugados algebraicos. Al conjunto de todos los n3meros de Perron se denota  $\mathbb{P}$

Con este teorema tenemos todo lo necesario para poder caracterizar las entropías de shifts de tipo finito y s3ficos.

## 1.4

# Calculabilidad y Complejidad

Durante la primera mitad del siglo XX, matemáticos como Kurt Gödel, Alan Turing y Alonzo Church analizaron que ciertos problemas básicos no pueden resolverse mediante computadoras. Un ejemplo es el problema de determinar si una afirmación matemática (suficientemente compleja) es verdadera o falsa. Esta tarea es fundamental, y aunque a priori podría ser automatizable, ahora sabemos que ningún algoritmo lo puede realizar.

Las teorías de calculabilidad y complejidad están estrechamente relacionadas. En la teoría de complejidad, el objetivo es clasificar problemas como fáciles o difíciles, mientras que en la teoría de calculabilidad, la clasificación de problemas se basa de manera más gruesa en aquellos que son descriptibles por algoritmos y aquellos que no.

### 1.4.1.

## Autómatas finitos deterministas

La teoría de autómatas es un buen punto de partida para el estudio de la teoría de la calculabilidad. Las teorías de calculabilidad y complejidad requieren una definición precisa de una computadora. La teoría de autómatas permite dar una noción muy sencilla de computación.

**Definición 1.64.** Un lenguaje  $L$  sobre un alfabeto  $\mathcal{A}$  es un conjunto

$$L \subset \mathcal{A}^*$$

Queremos estudiar si existe un mecanismo que detecte si  $w \in \mathcal{A}^*$  pertenece a  $L$ . Para ésto, pensaremos que la palabra se procesa por un objeto abstracto que variara respecto a la complejidad del lenguaje, los objetos abstractos de lectura comenzaran desde un autómata finito determinista hasta llegar a una máquina de Turing.

**Definición 1.65.** Un autómata finito determinista (AFD) es una tupla

$$A = (Q, \mathcal{A}, \delta, q_0, F)$$

Donde

- $Q$  es un conjunto de estados finito.
- $\mathcal{A}$  es un alfabeto finito.

- $\delta$  es una función de transición

$$\delta : \mathcal{A} \times Q \rightarrow Q$$

- $q_0$  estado inicial.
- $F \subset Q$  conjunto de estados finales.

Notemos que la función de transición  $\delta$ , se puede visualizar como un grafo donde los vértices son los estados del autómata y las aristas son los símbolos del alfabeto  $\mathcal{A}$ . Las palabras que puede leer un autómata son aquellas que codifican caminos en el autómata que comienzan en el estado inicial y terminan en algún estado final.

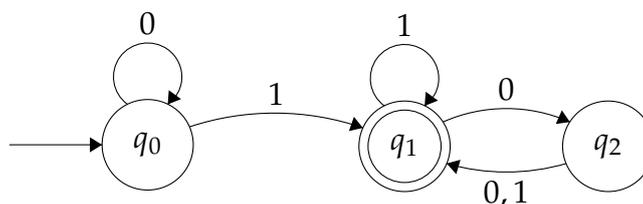
**Ejemplo 1.66.** Consideremos  $M_1 = (Q, \mathcal{A}, \delta, q_1, F)$ , donde

- $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$
- $\mathcal{A} = \{0, 1\}$
- $\delta$  función de transición está descrita por

	0	1
$q_0$	$q_0$	$q_1$
$q_1$	$q_2$	$q_1$
$q_2$	$q_1$	$q_1$

- $q_1$  estado inicial.
- $F = \{q_1\}$

Podemos representar gráficamente el autómata de la manera siguiente:



**Definición 1.67.** Sea  $w \in \mathcal{A}^*$  decimos que  $A$  acepta a  $w = w_1 \dots w_n \in \mathcal{A}^n$ , si existe

- $q_1, \dots, q_n \in Q$  tales que

$$\delta(w_i, q_{i-1}) = q_i$$

- $q_n \in F$

**Definición 1.68.** El lenguaje aceptado por un AFD  $A$  es

$$\mathcal{L}(A) = \{w \in \mathcal{A}^* : A \text{ acepta a } w\}$$

**Ejemplo 1.69.** Consideremos el subconjunto  $A \subset \mathcal{A}^*$  dado por

$$A = \{w \mid w \text{ contiene al menos un 1 y un número par de 0's sigue al último 1}\}$$

Entonces, el autómata finito determinista definido en 1.66 reconoce  $A$  o de manera equivalente  $\mathcal{L}(M_1) = A$ .

Dado que tenemos un objeto que acepta o reconoce lenguajes, definiremos todos los subconjuntos de  $\mathcal{A}^*$  que puedan ser aceptados o reconocidos por un AFD.

**Definición 1.70.** Un lenguaje  $L$  es *regular* si existe AFD  $A$  tal que  $\mathcal{L}(A) = L$ .

Notemos que el lenguaje definido en 1.69 es regular. Además de los AFD existen otros modelos como los autómatas con pila o máquinas de Turing acotadas, para una introducción sencilla a estos modelos ver [4].

**Observación 1.71.** Si  $L$  es un lenguaje regular, entonces  $\mathcal{A}^* \setminus L$  es regular.

No todos los lenguajes son regulares pues existen a lo sumo una cantidad contable de lenguajes regulares. Sin embargo, para probar que un lenguaje explícito no es regular será útil introducir un criterio que se conoce como el Lema del Bombeo.

**Lema 1.72** (Lema 1.70 de [4]). Si  $L$  es un lenguaje regular, entonces existe un número  $p \in \mathbb{N}$  (largo del bombeo), donde si  $w \in L$  tal que  $|w| \geq p$ , entonces  $w$  se puede dividir como  $w = xyz$  tal que

- $xy^n z \in L$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,
- $|y| > 0$ , y
- $|xz| \leq p$ .

**Ejemplo 1.73.** Consideremos el lenguaje  $D = \{w \in \{0,1\}^* \mid 0^n 1^n, n \geq 0\}$ , mostraremos con el lema del bombeo que  $D$  no es regular.

Dem: Asumamos que  $D$  es regular, entonces si consideramos  $p \in \mathbb{N}$  y  $w = 0^p 1^p \in D$ , como  $|w| \geq p$ , por lema del bombeo podemos dividir en tres partes, es decir,  $w = xyz$  tal que  $xy^n z \in D$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

- Si  $y$  posee solo ceros, se tiene que  $xyyz$  posee más ceros que unos, entonces no pertenece a  $D$ .

- Si  $y$  solo posee unos, entonces tenemos la misma contradicción.
- Si  $y$  tiene ceros y unos, se tiene que la cadena  $xyyz$  tiene los ceros y unos desordenados, entonces no pertenece a  $D$ .

Por lo tanto,  $D$  no es regular.

Una importancia de los lenguajes regulares es que permiten dar una nueva caracterización de los subshifts de tipo sófico. La prueba se sigue directamente de su caracterización mediante tener un conjunto de seguidores a la derecha finito.

**Teorema 1.74** (Capítulo 3 [2]). *Un subshift  $X$  es sófico, si y solamente si  $\mathcal{L}(X)$  es regular.*

### 1.4.2.

## Máquinas de Turing

En el ámbito de dispositivos con una cantidad limitada de memoria, los autómatas finitos destacan como modelos adecuados. Sin embargo, surge un modelo más avanzado presentado por Alan Turing en 1936, la máquina de Turing. Esta máquina, a diferencia de un autómata finito, posee una memoria ilimitada y sin restricciones, convirtiéndola en un modelo más preciso para las computadoras de propósito general. Aunque la máquina de Turing puede llevar a cabo cualquier tarea realizada por una computadora real, aún encuentra limitaciones al intentar resolver ciertos problemas, los cuales se sitúan más allá de los límites teóricos de la computación. El modelo de máquina de Turing utiliza una cinta infinita como su memoria ilimitada. Tiene una cabeza de cinta que puede leer y escribir símbolos y moverse por la cinta.

**Definición 1.75.** Una *máquina de Turing* es una tupla  $M$

$$M = (Q, \mathcal{A}, \Gamma, \delta, q_0, q_h)$$

Con

- $Q$  es un conjunto de estados finito.
- $\mathcal{A}$  es un alfabeto.
- $\Gamma$  alfabeto de trabajo.
- $\delta$  función de transición

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{-1, 0, 1\}$$

- $q_0$  estado inicial.
- $q_h$  estado de parada. donde  $\mathcal{A} \subset \Gamma$  y existe un símbolo especial  $\sqcup \in \Gamma \setminus \mathcal{A}$  que se denomina espacio en blanco.

La máquina de Turing será el objeto que permitirá describir un lenguaje asociado, a continuación describiremos como una máquina de Turing lee información y entrega una respuesta.

Una máquina de Turing opera sobre palabras de la manera siguiente. Inicialmente, la cinta, que se representa como un elemento de  $\Gamma^{\mathbb{Z}}$ , contiene solo la palabra de entrada partiendo en 0 y está en blanco en el resto de las posiciones. La máquina cuenta con un cabezal que puede leer y escribir en una posición a la vez, y que se encuentra inicialmente en el estado  $q_0$  a la izquierda de la palabra inicial. En cada etapa, la máquina lee el símbolo respectivo, y usando la función de transición actualiza tanto el estado como el símbolo en su posición actual, y luego se desplaza usando la tercera coordenada de la función de transición.

Formalmente, la dinámica de una máquina de Turing es la siguiente:

**Definición 1.76.** Dada una 3-Tupla  $(x, q, n) \in \Gamma^{\mathbb{Z}} \times Q \times \mathbb{Z}$ , definimos  $M(x, q, n) = (x', q', n')$ , donde si

$$\delta(q, x(n)) = (r, a, d) \in Q \times \Gamma \times \{-1, 0, 1\}$$

Entonces

$$q' = r, \quad n' = n + d$$

$$x'(k) = \begin{cases} x(k) & \text{si } k \neq n \\ a & \text{si } k = n \end{cases}$$

La definición anterior nos muestra como la máquina de Turing lee el símbolo de la cinta  $\Gamma$  de trabajo en la posición  $n$ , lo cambia por  $a$ , la cabeza de la máquina se mueve  $d$  pasos y transiciona del estado  $q$  al estado  $q'$ .

**Definición 1.77.** Sea  $w \in \mathcal{A}^*$ ,  $w = w_0 w_1 \dots w_{n-1}$  sucesión de elementos de largo  $n$ , entonces definimos  $\hat{w} \in \Gamma^{\mathbb{Z}}$  como:

$$\hat{w}(k) = \begin{cases} \sqcup, & \text{si } k < 0 \\ w_k, & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \\ \sqcup, & \text{si } k \geq n \end{cases}$$

Sea  $M$  una máquina de Turing y  $w \in \mathcal{A}^*$ , decimos que  $M$  se detiene en  $w$  si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$M^n(\hat{w}, q_0, 0) = (x, q_h, m)$$

Con  $x \in \Gamma^{\mathbb{Z}}$  y  $m \in \mathbb{Z}$ , es decir, la máquina de Turing se detiene si puede llegar al estado de parada. Si no entra en un estado de parada, seguirá indefinidamente, sin detenerse nunca.

**Definición 1.78.** El lenguaje de una máquina de Turing  $M$

$$\mathcal{L}(M) = \{w \in \mathcal{A}^* : M \text{ se detiene en } w\}$$

A continuación definiremos los subconjuntos de  $L \subset \mathcal{A}^*$  mediante la decisión de una máquina de Turing respecto a  $L$

**Definición 1.79.** Décimos que  $L \subset \mathcal{A}^*$  es:

- Recursivamente enumerable o reconocible, si existe máquina de Turing  $M$  tal que

$$L = \mathcal{L}(M)$$

- Co-recursivamente enumerable, si existe máquina de Turing  $M$  tal que

$$\mathcal{A}^* \setminus L = \mathcal{L}(M)$$

- Decidible, si  $L$  es recursivamente enumerable y co-recursivamente enumerable

**Proposición 1.80.** Si  $L$  es regular, entonces  $L$  es decidible.

*Demostración.* Primero notemos que basta demostrar que  $L$  es recursivamente enumerable o reconocible, ya que por la observación 1.71, tenemos que  $\mathcal{A}^* \setminus L$  es regular.

Como  $L$  es regular, entonces existe un AFD  $A = (Q, \mathcal{A}, \delta, q_0, F)$  tal que  $L(A) = L$ , consideremos la máquina de Turing  $M = (Q', \mathcal{A}, \Gamma, \delta', q'_0, q_h)$  tal que

- $Q' = Q \cup \{q_h\}$ .
- $\Gamma = \mathcal{A} \cup \{\sqcup\}$ .
- $q'_0 = q_0$ .



Notemos que  $\mathcal{L}(M) = D$ , por tanto,  $D$  es un lenguaje recursivamente enumerable. Así notamos que los lenguajes regulares están contenidos en los lenguajes recursivamente enumerables, y que las máquinas de Turing pueden computar lenguajes más complejos que los AFD.

En la definición 1.30 introduce los subshift de tipo efectivo, en los cuales el conjunto de palabras prohibidas está dado por un conjunto recursivamente enumerable, es decir, existe una máquina de Turing que acepta las palabras del conjunto.

## 1.5

### Presentaciones de grupos

Las presentaciones de grupos son de mucha utilidad en diversos contextos matemáticos, las razones de la importancia es que las presentaciones de grupo nos permiten describir el grupo respecto a un conjunto de generadores y relaciones entre los generadores, teniendo una representación del grupo concreta y estructurada, por lo dicho anteriormente el análisis de las propiedades algebraicas y combinatorias del grupo se nos facilitan. Además de tener una conexión con otras áreas de la matemática como la teoría de grafos, topología y teoría geométrica de grupos.

#### 1.5.1.

##### Presentación de Monoide

Consideraremos un alfabeto  $\mathcal{A}$  y una relación binaria  $R \subset \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^*$ . Sea  $u, v \in \mathcal{A}^*$  definimos  $u \sim v$  si y solo si existe  $x, y \in \mathcal{A}^*$  y  $(q, r) \in R$  tal que  $u = xqy, v = xry$ . La relación anterior no es de equivalencia y depende del conjunto  $R$  escogido, entonces denotaremos  $\sim_R$  como la relación de equivalencia más pequeña que extiende a  $\sim$ , Así el conjunto  $\mathcal{A}^* / \sim_R$  es el monoide más pequeño que cumple las relaciones en  $R$ , donde la operación es la concatenación.

**Definición 1.81.** Una presentación de monoide es un par  $(\mathcal{A}, R)$ , donde el generado por el par  $(\mathcal{A}, R)$  es el monoide con la operación concatenación más pequeño que cumple las relaciones  $R$ , es decir, Dado  $\mathcal{A}, R$  denotaremos

- $\langle \mathcal{A} | R \rangle$  al monoide de  $(\mathcal{A}^* / \sim_R, \cdot)$
- Para  $u \in \mathcal{A}^*$  denoto  $\underline{u} = [u]_{\sim_R}$ .

**Ejemplo 1.82.**

- Consideremos  $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ ,  $R = \emptyset$ , entonces  $\langle \mathcal{A} | R \rangle = (\mathcal{A}^*, \cdot)$  el monoide libre en dos elementos.

- Sea  $\mathcal{A} = \{a, b\}$ ,  $R = \{(ab, \epsilon), (ba, \epsilon)\}$ , entonces

$$\langle \mathcal{A} | R \rangle = \langle a, b | ab = \epsilon, ba = \epsilon \rangle$$

Así  $\langle \mathcal{A} | R \rangle \simeq (\mathbb{Z}, +)$

- Sea  $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$ ,  $R = \{(ab, \epsilon), (ba, \epsilon), (cd, \epsilon), (dc, \epsilon)\}$ , entonces

$$\langle \mathcal{A} | R \rangle = \langle a, b | ab = \epsilon, ba = \epsilon, cd = \epsilon, dc = \epsilon \rangle$$

Así  $\langle \mathcal{A} | R \rangle \simeq F_2$ , el grupo libre en dos generadores.

- Sea  $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$ ,  $R = \{(ab, \epsilon), (ba, \epsilon), (cd, \epsilon), (dc, \epsilon), (abcd, \epsilon)\}$ , entonces

$$\langle \mathcal{A} | R \rangle = \langle a, b | ab = \epsilon, ba = \epsilon, cd = \epsilon, dc = \epsilon, abcd = \epsilon \rangle$$

Así  $\langle \mathcal{A} | R \rangle \simeq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$

**Definición 1.83.** Decimos que  $(\mathcal{A}, R)$  presenta al monoide con operación concatenación  $(S, \cdot)$ . Sí,  $(S, \cdot)$  es isomorfo a  $\langle \mathcal{A} | R \rangle$  como monoide.

Por lo anterior tenemos que dado un alfabeto  $\mathcal{A}$  y un conjunto de relaciones dado por palabras de  $\mathcal{A}^*$  este será un monoide con la operación concatenación, entonces dado un monoide  $(S, \cdot)$  nos gustaría saber cuando admite una presentación de monoide dado un alfabeto y un conjunto de relaciones.

**Proposición 1.84.** Todo monoide admite una presentación.

*Demostración.* Sea  $(M, \cdot)$  monoide, consideremos  $\mathcal{A} = M$  y  $R \subset \mathcal{A}^2 \times \mathcal{A}$ , donde  $(ab, c) \in R$  si y solo si  $a \cdot b = c$  en  $M$ , es decir, describimos la tabla de multiplicación del monoide. Es inmediato que  $\phi : M \rightarrow \langle \mathcal{A} | R \rangle$  dado por  $\phi(m) = [m]_{\sim}$  describe un isomorfismo de monoides. ■

**Observación 1.85.** Sea  $(\mathcal{A}, R)$  presentación tal que para todo  $a \in \mathcal{A}$  existe  $a^{-1} \in \mathcal{A}$  tal que  $(aa^{-1}, \epsilon) \in R$  y  $(a^{-1}a, \epsilon) \in R$ , Entonces

$$\langle \mathcal{A} | R \rangle \text{ es grupo.}$$

**Observación 1.86.** Sea  $(\mathcal{A}, R)$  presentación tal que para todo  $a \in \mathcal{A}$ , existe  $a^{-1} \in \mathcal{A}$  tal que  $(aa^{-1}, \epsilon) \in R$  y  $(a^{-1}a, \epsilon) \in R$ . Entonces existe  $R' \subset \mathcal{A}^* \times \mathcal{A}^*$  tal que si  $(u, v) \in R'$ , entonces  $v = \epsilon$  y  $\langle \mathcal{A} | R \rangle = \langle \mathcal{A} | R' \rangle$ .

La propiedad anterior establece que si tenemos una presentación de grupo donde cada elemento tiene un inverso, entonces se puede considerar una versión modificada de la relación que solo involucra palabras de la forma  $(u, \varepsilon)$ , y esta versión genera el mismo grupo presentado.

**Definición 1.87.** Una presentación de grupo es un par  $(\mathcal{A}, R)$  con  $R \subset \mathcal{A}^*$ . El grupo generado por  $(\mathcal{A}, R)$  es

$$\langle \mathcal{A} | R \rangle = \left( \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^{-1} \right)^* / \sim_{R'}$$

Donde

$$R' = (R \times \{\varepsilon\}) \cup \bigcup_{a \in \mathcal{A}} \left\{ (aa^{-1}, \varepsilon), (a^{-1}a, \varepsilon) \right\}$$

$$\mathcal{A}^{-1} = \{a^{-1} : a \in \mathcal{A}\}$$

Con lo anterior la forma de presentar un grupo es más eficiente.

**Ejemplo 1.88.**

- $\mathbb{Z} \sim \langle a | \emptyset \rangle$
- $F_2 \sim \langle a, b | \emptyset \rangle$
- $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \sim \langle a, b | [a, b] \rangle$

**Proposición 1.89.** Fijemos  $\mathcal{A}$  y observemos  $R_1 \subset R_2 \subset \mathcal{A}^*$ . Si consideramos las presentaciones de grupos  $\langle \mathcal{A} | R_1 \rangle$  y  $\langle \mathcal{A} | R_2 \rangle$ , si consideramos

$$\varphi : \langle \mathcal{A} | R_1 \rangle \rightarrow \langle \mathcal{A} | R_2 \rangle$$

$$\varphi(\underline{u}_1) = \underline{u}_2$$

Entonces  $\varphi$  es epimorfismo y  $\langle \mathcal{A} | R_2 \rangle \approx \langle \mathcal{A} | R_1 \rangle / \ker(\varphi)$ .

Notemos que  $\varphi$  es un epimorfismo y lo segundo, se tiene por el primer teorema de isomorfismo. Una consecuencia inmediata de lo anterior es lo siguiente.

**Observación 1.90.** Todo grupo es cociente de un grupo libre.

**Definición 1.91.** Diremos que un grupo  $\Gamma$  es finitamente presentado, si admite una presentación de grupo donde el conjunto de generadores  $\mathcal{A}$  y el conjunto de relaciones  $R$  son finitos.

Dado que la presentación de un grupo puede ser obtenida por distintos conjuntos de relaciones, nos gustaría encontrar el conjunto de relaciones maximal que describe el grupo, a este conjunto maximal se le denomina problema de la palabra.

### 1.5.2.

#### Problema de la Palabra

El problema de la palabra de un grupo  $\Gamma$ , es el lenguaje de todas las palabras en los generadores que generan la identidad de grupo.

**Definición 1.92.** Dada una presentación de grupo  $(\mathcal{A}, R)$ , se define el problema de la palabra para una presentación de grupo

$$\mathcal{WP}_R(\mathcal{A}) = \{w \in \mathcal{A}^* : \underline{w} = \varepsilon\}$$

**Definición 1.93.** Sea  $\Gamma$  un grupo finitamente generado por  $S \subset \Gamma$ , el problema de la palabra de  $\Gamma$  dado por  $S$  es

$$\mathcal{WP}_S(\Gamma) = \{w \in S^* : \underline{w} = 1_\Gamma\}$$

Es un argumento clásico que la decidibilidad (o recursiva enumerabilidad) del problema de palabra de un grupo es invariante bajo cambios del conjunto de generadores.

## 1.6

### Grupos hiperbólicos

La teoría de grupos hiperbólicos fue introducida por primera vez por el matemático ruso-francés Mikhail Gromov en la década de 1980. La motivación detrás del desarrollo de la teoría de grupos hiperbólicos estaba vinculada a la idea de generalizar conceptos geométricos hiperbólicos a estructuras algebraicas más generales. Gromov estaba interesado en entender las propiedades geométricas de grupos y cómo podrían clasificarse según sus comportamientos geométricos.

Consideremos  $(X, d)$  un espacio métrico, una geodésica en  $X$  es una función definida en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$

$$\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow X$$

tal que

$$|t_1 - t_2| = d(\gamma(t_1), \gamma(t_2))$$

Para todo  $t_1, t_2 \in I$ , un espacio métrico se dice geodésico, si para cualquier par de puntos  $x, y$  existe una geodésica  $\gamma$ . Como ejemplos, podemos considerar a  $\mathbb{R}^n$  con la métrica euclidiana, un árbol, el plano hiperbólico, etc.

Dado un espacio métrico geodésico  $(X, d)$ ,  $x, y, z \in X$  y  $\delta > 0$ , decimos que el triángulo  $T(x, y, z)$  es  $\delta$ -delgado si para todo trio de geodésicas  $xy, xz, yz$  que unen los puntos extremos se tiene que  $xz, xy$  están contenidas en la  $\delta$ -vecindad de  $yz$ .

**Definición 1.94.** Un espacio métrico geodésico  $(X, d)$  se dice  $\delta$ -hiperbólico si todo triángulo es  $\delta$ -hiperbólico.

Consideremos un grupo  $\Gamma$  y un conjunto generador  $S$  simétrico, para todo  $g, g' \in \Gamma$ , definiremos una métrica para los elementos del grupo.

**Definición 1.95.** Sea  $g, g' \in \Gamma$  definimos la distancia entre  $g, g'$  como

$$d_S(g, g') = \min\{n \in \mathbb{N} : g^{-1}g' = s_1s_2 \dots s_n, s_i \in S\}$$

La métrica definida anteriormente se denomina métrica de la palabra relativa a  $\Gamma$ . Si  $\Gamma$  es un grupo finitamente generado y  $S$  es un conjunto finito. Diremos que el grupo  $\Gamma$  es hiperbólico si el espacio métrico  $(\Gamma, d_S)$  donde las aristas unitarias entre elementos del grupo se identifican con copias de  $[0, 1]$  es hiperbólico.

- Todo grupo finito es hiperbólico, con  $\delta = \text{diam}(\Gamma)$ .
- Todo grupo libre es hiperbólico, con  $\delta = 0$ .

Notemos que la hiperbolicidad de un grupo es independiente del conjunto generador escogido (aunque la constante  $\delta$  puede cambiar). Lo anterior es producto de que la hiperbolicidad es invariante de quasi-isometría.

Ahora definiremos el conjunto de las palabras geodésicas de un grupo  $\Gamma$

**Definición 1.96.** Consideremos un grupo  $\Gamma$  con conjunto generador  $S$ , el conjunto de las palabras geodésicas de  $\Gamma$  con generador  $S$  esta dado por

$$\text{Geo}(\Gamma, S) = \{w \in S^* : |w| = d_S(e_G, \underline{w}), \underline{w} \in \Gamma\}$$

Donde  $|w|$  es la cantidad de generadores en la concatenación y  $\underline{w}$  es el representante de  $w$  en  $\Gamma$ .

Nuestro interés en los grupos hiperbólicos radica en el siguiente resultado que muestra que el lenguaje de sus geodésicas es regular.

**Teorema 1.97** (Corolario 2.20 [5]). *Sea  $\Gamma$  un grupo hiperbólico con conjunto generador  $S$  finito y simétrico. Entonces  $\text{Geo}(\Gamma, S)$  es un lenguaje regular.*

# 2

---

## Análisis del Problema 108 de Rufus Bowen

El primer objetivo es dar una interpretación geométrica del conjunto  $V$  definido en la pregunta 108 y además analizar que tipo de características posee. Naturalmente, el espacio  $V$  corresponde a un subshift cuyos patrones prohibidos están dados por el problema de la palabra de un grupo.

Más precisamente, dado un grupo  $\Gamma$  finitamente generado y un conjunto finito  $S$  de generadores de  $\Gamma$ , consideraremos el subshift  $X_{\mathcal{WP}_S(\Gamma)}$  cuyo alfabeto estara dado por el conjunto generador  $S$  escogido y sus palabras prohibidas están dadas por  $\mathcal{WP}_S(\Gamma)$ , es decir,

$$X_{\mathcal{WP}_S(\Gamma)} = S^{\mathbb{Z}} \setminus \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{Z}, \\ w \in \mathcal{WP}_S(\Gamma)}} \sigma^m([w]).$$

Intuitivamente, este espacio representa el conjunto de paseos bi-infinitos sin ciclos en el grupo  $\Gamma$ , donde los elementos sucesivos del paseo están separados por generadores en  $S$ , vemos entonces que el conjunto  $V$  es un subshift con patrones prohibidos dados por el problema de la palabra. Además, nos interesa analizar la entropía de un subshift del tipo anteriormente descrito, esto tiene relación con la sección *iii* del problema 108. En particular, buscaremos determinar si es una propiedad del grupo o bien, si depende de la elección de generadores de este. Nos interesaremos también en los distintos valores que puedan obtenerse de esta forma.

Es necesario destacar que de manera paralela a este trabajo otros autores [6] recientemente estudiaron el mismo objeto en relación a paseos aleatorios en grafos. En

particular, lograron dar una caracterización de la entropía de estos objetos en términos de la constante de conectividad del grafo de Cayley.

En un segundo tiempo, estudiaremos brevemente una variante del problema 108 donde en vez de considerar como patrones prohibidos el problema de la palabra, consideraremos el conjunto de todas las palabras que no son geodésicas. Es decir

$$X_{Geo(\Gamma, S)} = \{x \in S^{\mathbb{Z}} : \forall w \sqsubset x, w \text{ es geodésica}\}.$$

En otras palabras,  $X_{Geo(\Gamma, S)}$  consistirá en el espacio de todas las geodésicas bi-infinitas en el grupo inducidas por el conjunto de generadores  $S$ .

**Observación 2.1.** Claramente para todo grupo  $\Gamma$  y conjunto de generadores  $S$ , se tiene que  $X_{Geo(\Gamma, S)} \subset X_{WP_S(\Gamma)}$ .

## 2.1

### Análisis de grupo finitos

Para comenzar el estudio de los objetos anteriores, primero consideramos el caso especial de un grupo finito. La observación clave es que el subshift con patrones prohibidos dado por el problema de la palabra en un grupo finitamente generado de orden finito, es necesariamente vacío.

**Proposición 2.2.** Si  $\Gamma$  es un grupo finito, para todo  $S \subset \Gamma$ , se tiene que

$$X_{WP_S(\Gamma)} = X_{Geo(\Gamma, S)} = \emptyset.$$

*Demostración.* Sea  $\Gamma$  un grupo finito con  $|\Gamma| = n$  y  $S$  un conjunto generador finito, y supongamos que  $X_{WP_S(\Gamma)} \neq \emptyset$ , entonces existe una secuencia bi-infinita  $x \in X_{WP_S(\Gamma)}$ . Sea  $w = s_1 s_2 \cdots s_n \sqsubset x$  una subpalabra de largo  $n$ .

Para  $k \in \{0, \dots, n\}$  definimos  $\gamma_k = \underline{s_1 \cdots s_k}$  con  $\gamma_0 = 1_\Gamma$ . Por principio del palomar, existen índices  $0 \leq i < j \leq n$  tales que  $\gamma_i = \gamma_j$ . De donde se deduce que  $\underline{s_1 \cdots s_i} = \underline{s_1 \cdots s_j}$  y luego  $\underline{s_{i+1} \cdots s_j} = 1_\Gamma$ , lo cual contradice la hipótesis de que  $x \in X_{WP_S(\Gamma)}$  por la Proposición 1.14.

De lo anterior se sigue que  $X_{WP_S(\Gamma)} = \emptyset$  y por lo tanto también que  $X_{Geo(\Gamma, S)} = \emptyset$ . ■

## 2.2

### Análisis de $X_{\mathcal{WP}(\Gamma,S)}$ para clases particulares de grupos

#### 2.2.1.

#### Análisis de grupos libres

Comenzaremos analizando la invariancia de las propiedades dinámicas del subshift respecto al cambio de conjunto generador del grupo. Para ello, consideraremos primero el caso donde  $\Gamma = \mathbb{Z}$ .

Consideremos el conjunto generador simétrico  $S_0 = \{a^{-1}, a\}$  con  $a^{-1} = -1$ ,  $a = 1$ , para estudiar el subshift con patrones prohibidos dados por el problema de palabra de  $\mathbb{Z}$  con generador  $S$ , es decir,  $X_{\mathcal{WP}_{S_0}(\mathbb{Z})}$ . El subshift se puede describir de la manera siguiente:

$$X_{\mathcal{WP}_{S_0}(\mathbb{Z})} = \{x \in S^{\mathbb{Z}} : \nexists w \sqsubset x : |w|_a = |w|_{a^{-1}}\},$$

donde  $|w|_a$  y  $|w|_{a^{-1}}$  son la cantidad de  $a$ 's y  $a^{-1}$ 's que aparecen en la sub-palabra  $w$ .

**Proposición 2.3.** Para el conjunto generador  $S_0 \subset \mathbb{Z}$ , el subshift  $X_{\mathcal{WP}_{S_0}(\mathbb{Z})}$  es de tipo finito

*Demostración.* Denotemos  $\mathcal{F} = \{aa^{-1}, a^{-1}a\}$  y notemos que

$$\begin{aligned} X_{\mathcal{WP}_{S_0}(\mathbb{Z})} &= \{x \in S^{\mathbb{Z}} : \nexists w \sqsubset x : |w|_a = |w|_{a^{-1}}\} \\ &= \{x \in S^{\mathbb{Z}} : aa^{-1} \not\sqsubset x \wedge a^{-1}a \not\sqsubset x\} \\ &= X_{\mathcal{F}} \end{aligned}$$

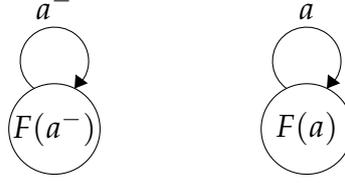
De esta forma se concluye que  $X_{\mathcal{WP}_{S_0}(\mathbb{Z})}$  es un subshift de tipo finito. ■

Notemos además que  $X_{\mathcal{WP}_{S_0}(\mathbb{Z})}$  consiste en tan solo dos configuraciones, la constante de valor  $a$ , y la constante de valor  $a^{-1}$ .

Para elaborar el grafo asociado al subshift anterior utilizaremos como vértices del grafo los conjuntos de seguidores a la derecha, en este caso solo tenemos dos vértices, uno correspondiente a al generador  $a$  y otro respecto a  $a^{-1}$ , es decir,

$$\begin{aligned} F(a) &= \{a, aa, aaa, \dots\} \\ F(a^{-1}) &= \{a^{-1}, a^{-1}a^{-1}, a^{-1}a^{-1}a^{-1}, \dots\} \end{aligned}$$

Por tanto, el grafo  $G$  asociado es de la forma



Donde  $a^- = a^{-1}$ , además notemos que la matriz de adyacencia es,

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De donde concluimos que la entropía es  $\log(1) = 0$ .

Cambiamos ahora el conjunto generador de  $\mathbb{Z}$  por el conjunto generador simétrico dado por  $S_1 = \{b^{-1}, b, a\}$ , donde  $b = 2, a = 1, b^{-1} = -2$ , tendremos que

$$X_{\mathcal{WP}_{S_1}(\mathbb{Z})} = \{x \in S_1^{\mathbb{Z}} : \nexists w \sqsubset x : |w|_a + 2|w|_b - 2|w|_{b^{-1}} = 0\}$$

**Proposición 2.4.** El subshift  $X_{\mathcal{WP}_{S_1}(\mathbb{Z})}$  no es de tipo finito. En particular, no es topológicamente conjugado a  $X_{\mathcal{WP}_{S_0}(\mathbb{Z})}$ .

*Demostración.* Si utilizamos el teorema de palabras sincronizantes (Teorema 1.23), se tiene que al considerar  $m \geq 1, v = b^{-m} \in S^*, u = a$  y  $w = ab^m \in S^*$ . Notemos que  $uv \in \mathcal{L}(X_{\mathcal{WP}_{S_1}(\mathbb{Z})})$  y  $vw \in \mathcal{L}(X_{\mathcal{WP}_{S_1}(\mathbb{Z})})$  ya que se encuentran como subpalabras en las configuraciones siguientes:

$$x_1 = \dots b^{-1}b^{-1}b^{-1}b^{-1}b^{-1}b^{-1}b^{-1}ab^{-1}b^{-1}b^{-1}b^{-1}b^{-1} \dots$$

$$x_2 = \dots b^{-1}b^{-1}b^{-1}b^{-1}b^{-1}b^{-1}b^{-1}abbbbbbb \dots$$

Sin embargo

$$uvw = ab^{-m}ab^m \notin \mathcal{L}(X_{\mathcal{WP}_{S_1}(\mathbb{Z})})$$

Como  $|v| = m$  puede tomarse arbitrariamente grande, concluimos que  $X_{\mathcal{WP}_{S_1}(\mathbb{Z})}$  no es subshift de tipo finito. Como ser subshift de tipo finito es invariante de conjugación topológica, obtenemos que este subshift no es topológicamente conjugado a  $X_{\mathcal{WP}_{S_0}(\mathbb{Z})}$ . ■

En particular, obtenemos que los subshifts asociados a problemas de palabra sí dependen del conjunto de generadores asociados. A continuación mostraremos que  $X_{\mathcal{WP}_{S_1}(\mathbb{Z})}$  es un subshift sófico.

**Proposición 2.5.** El subshift  $X_{\mathcal{WP}_{S_1}(\mathbb{Z})}$  es sófico.

*Demostración.* Como vimos anteriormente, un subshift es sófico si y solamente si su lenguaje es regular. Un autómata finito determinista que reconoce el lenguaje  $\mathcal{L}(X_{\mathcal{WP}_{S_1}(\mathbb{Z})})$  se muestra en la figura 2.1.

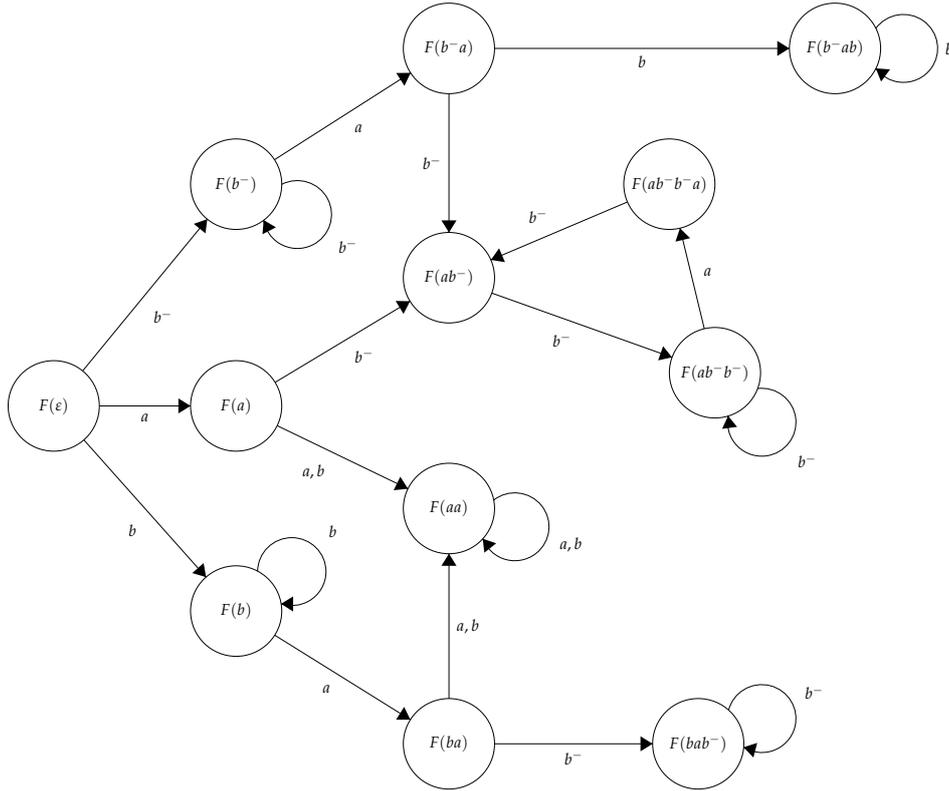


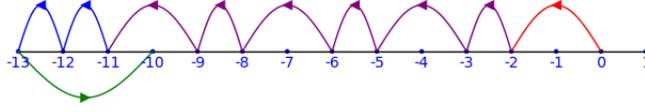
Figura 2.1: Un autómata para el lenguaje del subshift  $X_{\mathcal{WP}_{S_1}(\mathbb{Z})}$ .



A continuación mostraremos que también existe un conjunto de generadores de  $\mathbb{Z}$  cuyo subshift asociado no es ni siquiera sófico. Sea  $S_2 = \{a, b, c, a^-, b^-, c^-\}$  donde  $a = 1, a^- = -1, b = 2, b^- = -2, c = 3, c^- = -3$ . Mostraremos que  $X_{\mathcal{WP}_{S_2}(\mathbb{Z})}$  no es un subshift sófico, para esto mostraremos que este subshift posee una cantidad numerable de conjuntos de seguidores a la derecha.

**Proposición 2.6.**  $X_{\mathcal{WP}_{S_2}(\mathbb{Z})}$  no es un subshift sófico

*Demostración.* Consideramos para cada  $n \in \mathbb{N}$  la palabra  $w_n = b^-(a^-b^-)^n a^- a^- c \in \mathcal{L}(X_{\mathcal{WP}_{S_2}(\mathbb{Z})})$ . Una representación gráfica de esta palabra se presenta en la figura 2.2.

Figura 2.2: La palabra  $w_3$ 

De la definición de  $w_n$ , se observa que si  $n \leq m$ , entonces  $w_n$  es sufijo de  $w_m$ . Además, se puede observar que la palabra  $v_m = c^m b$  pertenece al conjunto de seguidores  $\mathcal{F}(w_n)$  si  $m \geq n$ , en efecto, notemos que  $w_m v_m$  ocurre como subpalabra de

$$x = \dots c^- c^- c^- c^- c^- c^- w_m v_m c c c c c c \dots$$

En particular,  $w_n v_m$  está en el lenguaje, luego  $v_m \in \mathcal{F}(w_n)$ . Por otro lado, es claro que si  $n > m$ , la palabra  $v_m$  no es un posible seguidor de  $w_n$ , ya que la única manera de extender  $w_n$  a la derecha es comenzar con al menos  $n$  veces el símbolo  $c$ .

Del argumento anterior se sigue que la colección de seguidores a la derecha  $\{\mathcal{F}(w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  es infinita, de donde se deduce por el Teorema 1.28 que  $X_{\mathcal{WP}_{S_2}(\mathbb{Z})}$  no es un subshift sófico. ■

De las tres proposiciones anteriores obtenemos inclusive en el grupo  $\mathbb{Z}$  se pueden obtener tanto subshifts de tipo finito, como subshifts sóficos, e inclusive subshifts que no son ni siquiera sóficos. A continuación mostraremos que para todo grupo recursivamente presentado (en particular, para  $\mathbb{Z}$ ) todo subshift de este tipo es siempre efectivo.

**Observación 2.7.** Si  $\Gamma$  es un grupo finitamente generado y recursivamente presentado, entonces para todo conjunto finito de generadores  $S \subset G$  el subshift  $X_{\mathcal{WP}_S(\Gamma)}$  es efectivo.

*Demostración.* Si  $\Gamma$  es recursivamente presentado, se sigue que  $\mathcal{WP}_S(\Gamma)$  es recursivamente enumerable. Como  $\mathcal{WP}_S(\Gamma)$  es un conjunto de palabras prohibidas para  $X_{\mathcal{WP}_S(\Gamma)}$ , se sigue que éste es efectivo. ■

Notemos que no logramos probar el converso, es decir, no sabemos si es cierto que si para todo conjunto de generadores  $\mathcal{WP}_S(\Gamma)$  es efectivo, entonces  $\Gamma$  es recursivamente presentado.

Pasemos ahora a estudiar el caso de el grupo libre  $F_2 = \langle a, b \rangle$ . Consideremos primero el conjunto generador canónico  $S = \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ . Podemos representar a  $F_2$  mediante la siguiente presentación de grupo. Tenemos lo siguiente.



## 2.2.2.

**Análisis de grupos que no son libres**

Consideremos ahora el grupo  $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . En este caso, mostraremos que el conjunto de generadores canónicos no induce un subshift de tipo sófico. En efecto, sea  $S = \{a, a^-, b, b^-\}$  donde  $a = (1, 0)$ ,  $a^- = (-1, 0)$ ,  $b = (0, 1)$  y  $b^- = (0, -1)$ .

**Proposición 2.9.** El subshift  $X_{\mathcal{WP}_S(\mathbb{Z}^2)}$  no es de tipo sófico.

*Demostración.* Nuevamente, mostraremos que el conjunto de seguidores a la derecha no es finito. Consideremos para  $n \in \mathbb{N}$  la palabra  $w_n = a^n b^3 (a^-)^n b^{-1}$ . Para  $m \geq 1$ , definimos  $u_m = a^{m-1} b^- (a^-)^{m-1}$  y notamos que  $w_n u_m \in \mathcal{L}(X_{\mathcal{WP}_S(\mathbb{Z}^2)})$  si y solamente si  $m \leq n$ . En particular,  $X_{\mathcal{WP}_S(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})}$  no es tipo sófico, pues la cantidad de conjuntos de seguidores a la derecha es numerable. ■

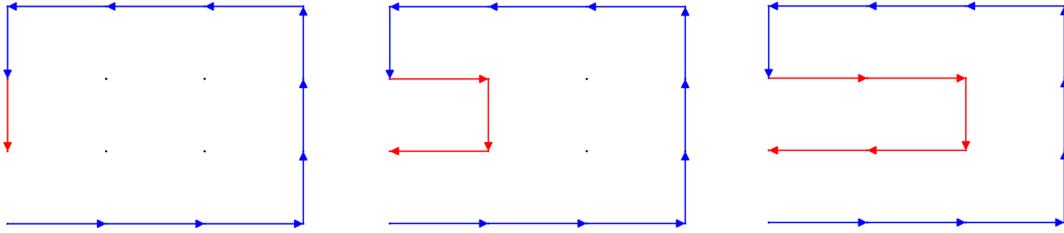


Figura 2.3: Las palabras  $w_3u_1$ ,  $w_3u_2$  y  $w_3u_3$  de izquierda a derecha.

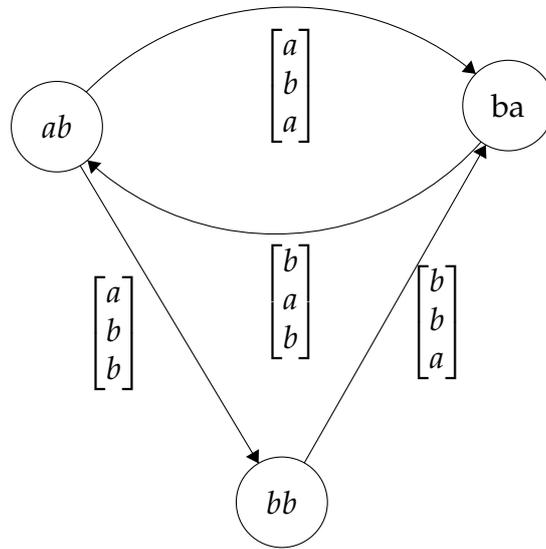
Consideremos ahora el caso del grupo  $PSL(2, \mathbb{Z})$ . Si bien este grupo no es libre, es muy cercano a un grupo libre (contiene a  $F_2$  como subgrupo de índice finito). Una presentación está dada por

$$PSL(2, \mathbb{Z}) \cong \langle a, b \mid a^2 = b^3 = 1 \rangle.$$

En este caso, estudiaremos los conjuntos de generadores  $S_0 = \{a, b\}$  y  $S_1 = \{a, b, b^-\}$ . En ambos casos veremos que obtenemos subshifts de tipo finito, sin embargo, sus entropías diferirán.

**Proposición 2.10.** El subshift  $X_{\mathcal{WP}_{S_0}(PSL(2, \mathbb{Z}))}$  es de tipo finito y su entropía es  $\log(1,325)$ .

*Demostración.* El hecho de que  $X_{\mathcal{WP}_{S_0}(PSL(2, \mathbb{Z}))}$  es de tipo finito es directo. Un conjunto finito de palabras prohibidas está dado por  $\mathcal{F} = \{aa, bbb\}$ . Un grafo  $G_0$  que representa el subshift de palabras superiores asociado está dado por



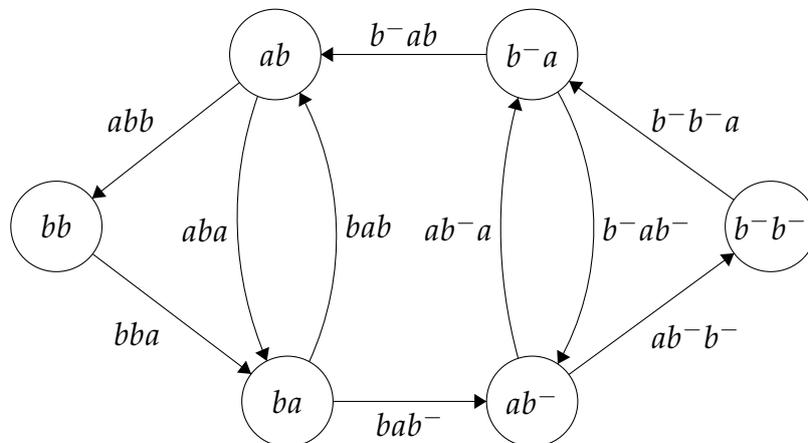
la matriz de adyacencia es de la forma,

$$A_{G_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un cálculo muestra que la entropía es  $\log(1,325)$  y su polinomio característico es  $-\lambda^3 + \lambda + 1$  ■

**Proposición 2.11.** El subshift  $X_{\mathcal{WP}_{S_1}(PSL(2,\mathbb{Z}))}$  es de tipo finito y su entropía es  $\log(1,769)$ .

*Demostración.* El hecho de que  $X_{\mathcal{WP}_{S_1}(PSL(2,\mathbb{Z}))}$  es de tipo finito es directo. Un conjunto finito de palabras prohibidas está dado por  $\mathcal{F} = \{aa, bb^-, b^-b, bbb, b^-b^-b^-\}$ . Un grafo  $G_1$  que representa el subshift de palabras superiores asociado está dado por



La matriz de adyacencia de  $G_1$  está dada por

$$A_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Un cálculo por computador muestra que el polinomio característico es  $\lambda^3(\lambda^3 - 2\lambda - 2)$  y, por lo tanto, la entropía es aproximadamente  $\log(1,769)$ . ■

## 2.3

### Análisis de $X_{Geo(\Gamma,S)}$ para algunos grupos

Recordemos que para un grupo  $\Gamma$  y un conjunto finito de generadores  $S$ , el subshift geodésico está dado por

$$X_{Geo(\Gamma,S)} = \{x \in S^{\mathbb{Z}} : \forall w \sqsubset x, w \text{ es una geodésica}\}$$

Por supuesto, una descripción en términos de palabras prohibidas está dada por el conjunto de todas las secuencias de generadores en el grupo que no son geodésicas. Una primera observación como consecuencia directa del Teorema 1.97 es la siguiente

**Teorema 2.12.** *Si  $\Gamma$  es un grupo hiperbólico, entonces para todo conjunto de generadores  $S$ , el subshift geodésico  $X_{Geo(\Gamma,S)}$  es de tipo sófico.*

De hecho, el resultado es evidentemente cierto cada vez que el lenguaje de las geodésicas sea regular. Lo anterior se tiene de manera más general para grupos automáticos. Una referencia para esos grupos puede encontrarse en [7].

Es importante notar que si bien el resultado anterior asegura que en esta clase de grupos  $X_{Geo(\Gamma,S)}$  es sófico, la prueba no otorga una presentación sófica explícita para estos objetos. Para comprenderlos mejor daremos presentaciones en algunos casos particulares.

**Ejemplo 2.13.** Consideremos el Grupo  $\mathbb{Z}$  con conjunto generador dado por  $S_1 = \{-2, 2, 1, -1\}$ , si calculamos los seguidores la derecha de  $X_{Geo(\mathbb{Z}, S_1)}$ , tendremos que

son

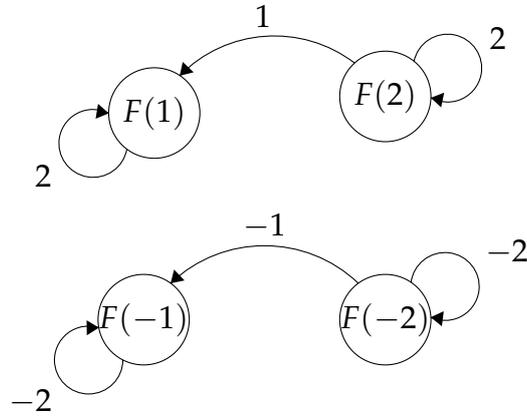
$$\mathcal{F}(-1) = \{(-2)^n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{F}(-2) = \{(-2)^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{-1(-2)^n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{F}(1) = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathcal{F}(2) = \{2^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{1(2)^n : n \in \mathbb{N}\}$$

Como son una cantidad finita, se tiene que  $X_{Geo(\mathbb{Z},S_1)}$  es un subshift de tipo sófico. Ahora si consideramos el grafo  $G$  asociado a los seguidores a la derecha de  $X_{Geo(\mathbb{Z},S_1)}$



La matriz asociada al grafo anterior

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por teorema de Perron-Frobenius separando la matriz en sus componentes irreducibles, el logaritmo del valor propio de módulo mayor de la matriz  $A_G$  es la entropía topológica de  $X_{Geo(\mathbb{Z},S_1)}$ , el valor propio de módulo más grande de  $A_G$  es  $\lambda = 1$ , pues el polinomio característico es  $(\lambda - 1)^4$ . En particular, la entropía topológica es 0.

Consideremos ahora el caso de  $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  con el conjunto de generadores canónicos  $S = \{a = (1,0), b = (0,1), a^{-1} = (-1,0), b^{-1} = (0,-1)\}$ , utilizando el teorema de palabras sincronizantes podemos notar que este subshift no es un SFT, pues al considerar  $k > 1$  y  $u = a, v = b^k, w = a^{-1}$ , tendremos que

$$uv \in \mathcal{L}(X_{Geo(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, S)})$$

$$vw \in \mathcal{L}(X_{Geo(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, S)})$$

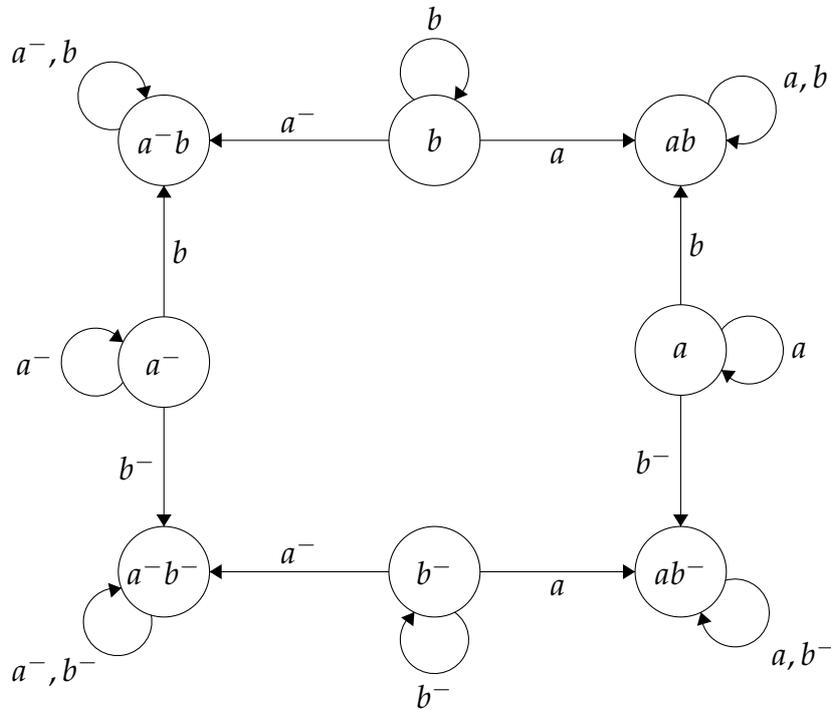
Pero,

$$uvw \notin \mathcal{L}(X_{Geo(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, S)})$$

Por tanto  $X_{Geo(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, S)}$ , no es un subshift de tipo finito, pero debemos notar que si es de tipo sófico (una prueba indirecta está dada por el hecho de que  $\mathbb{Z}^2$  es un grupo automático, pero daremos una prueba directa), pues las geodésicas dependen de observar los últimos dos símbolos de las palabras geodésicas, notando que los conjuntos de seguidores a la derecha son:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(a) &= \{a^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{bw : w \in \{a, b\}^*\} \cup \{b^-w : w \in \{a, b^-\}^*\} \\ \mathcal{F}(a^-) &= \{(a^-)^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{bw : w \in \{a^-, b\}^*\} \cup \{b^-w : w \in \{a^-, b^-\}^*\} \\ \mathcal{F}(b) &= \{b^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{aw : w \in \{a, b\}^*\} \cup \{a^-w : w \in \{a^-, b\}^*\} \\ \mathcal{F}(b^-) &= \{(b^-)^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{aw : w \in \{a, b^-\}^*\} \cup \{a^-w : w \in \{a^-, b^-\}^*\} \\ \mathcal{F}(ab) &= \{a, b\}^* \\ \mathcal{F}(ab^-) &= \{a, b^-\}^* \\ \mathcal{F}(a^-b) &= \{a^-, b\}^* \\ \mathcal{F}(a^-b^-) &= \{a^-, b^-\}^*. \end{aligned}$$

Con grafo asociado  $G$  descrito por



y matriz de adyacencia

$$A_G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Concluyendo que la entropía es  $\log(2)$ .

Finalmente, consideremos el caso de  $PSL(2, \mathbb{Z}) = \langle a, b \mid a^2 = b^3 = 1 \rangle$ . Se trata de un grupo hiperbólico. En este caso volveremos a estudiar los dos conjuntos de generadores de la sección anterior.

Para el conjunto de generadores  $S_0 = \{a, b\}$ , notemos que toda palabra que ocurre en  $x \in X_{\mathcal{WP}_{S_0}}(PSL(2, \mathbb{Z}))$  es necesariamente geodésica. Luego tenemos que

$$X_{\mathcal{WP}_{S_0}}(PSL(2, \mathbb{Z})) = X_{Geo}(PSL(2, \mathbb{Z}), S_0).$$

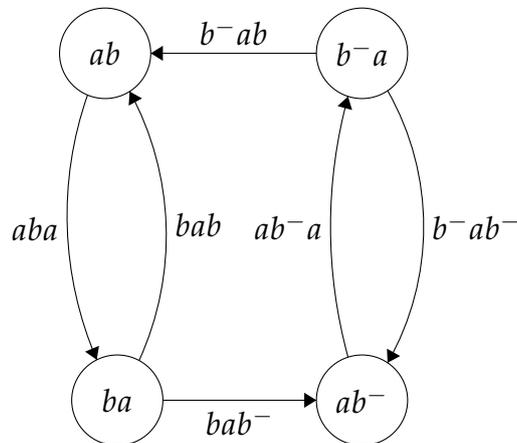
En particular, nos da un ejemplo no evidente donde el subshift geodésico es un subshift de tipo finito.

En cambio, si consideramos el conjunto de generadores  $S_1 = \{a, b, b^{-}\}$ , ahora  $X_{Geo}(PSL(2, \mathbb{Z}), S_1)$  es un subconjunto propio de  $X_{\mathcal{WP}_{S_1}}(PSL(2, \mathbb{Z}))$ . En efecto, el punto periódico  $(abb)^\infty$  es un elemento de  $X_{\mathcal{WP}_{S_1}}(PSL(2, \mathbb{Z}))$  que no pertenece a  $X_{Geo}(PSL(2, \mathbb{Z}), S_1)$ , ya que  $bb$  no es geodésica para el conjunto de generadores  $S_1$  (una palabra más corta es  $b^{-}$ ).

Notemos que el subshift  $X_{Geo}(PSL(2, \mathbb{Z}), S_1)$  está dado por el conjunto de patrones prohibidos

$$\mathcal{F} = \{aa, bb^{-}, bb, b^{-}b^{-}, b^{-}b\}.$$

Luego su grafo asociado  $G_1$  está dado por



y matriz de adyacencia

$$A_{G_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El polinomio característico de  $A_{G_1}$  está dado por  $\lambda^2(\lambda^2 - 2)$ , por tanto, la entropía es  $\frac{\log(2)}{2}$ .

# 3

---

## Conclusiones

Como hemos vislumbrado en los ejemplos, la estructura dinámica de  $X_{\mathcal{WP}_S(\Gamma)}$  no es invariante bajo cambio de generadores del grupo, lo que si tenemos es que si el  $\mathcal{WP}_S(\Gamma)$  es recursivamente enumerable entonces inevitablemente el  $X_{\mathcal{WP}_S(\Gamma)}$  es efectivo para todo conjunto generador del grupo. Al analizar el subshift  $X_{Geo(\Gamma,S)}$  notamos que si  $Geo(\Gamma, S)$  es un lenguaje regular, entonces  $X_{Geo(\Gamma,S)}$  es de tipo sófico.

Las palabras que aparecen en secuencias de  $X_{\mathcal{WP}_S(\Gamma)}$  representan paseos finitos en el grafo de Cayley de  $G$  con los generadores  $S$  que pueden ser extendidos a un paseo bi-infinito que no repite vértices. También tenemos algo similar con  $X_{Geo(\Gamma,S)}$ , pero en este caso las palabras son geodésicas locales que se pueden extender a geodésicas bi-infinitas en el grafo de Cayley. Por lo tanto, ambos espacios de shift nos sirven para estudiar el número de formas en que uno de estos dos objetos se puede extender utilizando la noción de extensores a la derecha de un subshift.

Lo anterior también se puede observar de manera más precisa en el grafo asociado al shift de arcos en el caso en que estos shifts sean de tipo finito o sófico. Más precisamente, el grado de salida de un vértice (en un grafo esencial) nos otorga información sobre el número de continuaciones a la derecha de la palabra, y, por lo tanto, del crecimiento sobre el número de paseos autoevitantes o geodésicas bi-infinitas en el espacio.

La entropía de un subshift  $X_{\mathcal{WP}_S(\Gamma)}$  se puede interpretar en términos de un objeto que se llama la constante de conectividad del grafo de Cayley (ver [6, Section 2.5]). Más precisamente, si consideramos el número  $c_n$  de caminos autoevitantes de largo  $n$  desde la identidad de  $G$  en el grafo de Cayley, obtenemos una secuencia submultiplicativa y por razonamientos clásicos (lema de Fekete) el límite de  $\sqrt[n]{c_n}$  existe y se

---

denomina constante de conectividad. Se puede probar (ver [6, Lemma 3.4]) que la entropía de  $X_{\mathcal{WP}_S(\Gamma)}$  es precisamente el logaritmo del límite anterior.

En el caso del grupo libre  $F_n$  con sus generadores canónicos  $S$ . Observamos que el crecimiento del subshift  $X_{\mathcal{WP}_S(F_n)}$  asociado también corresponde al crecimiento del grupo (número de elementos a una distancia fija de la identidad). Por lo tanto, la entropía también puede interpretarse como la constante asociada al crecimiento exponencial del grupo. El mismo comportamiento ocurre con  $PSL_2(\mathbb{Z})$  y los conjuntos de generadores que estudiamos.

Sin embargo, el comportamiento anterior es debido únicamente a que en esos casos particulares, ya sea el número de caminos autoevitantes o de geodésicas corresponde al número de elementos del grupo a distancia exactamente el largo del camino. En el caso de otras elecciones de generadores, como por ejemplo,  $\mathbb{Z}$  con  $S = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$  ya no se puede obtener una relación similar, y tan solo guardamos la interpretación en términos de caminos autoevitantes. Por supuesto, observamos que al variar el conjunto de generadores la entropía no se mantiene constante. Nuevamente, la interpretación correcta es la asociada al crecimiento asintótico del número de caminos autoevitantes.

# Bibliografía

- [1] B. Marcus, “Rufus bowen’s notebook,” <https://bowen.pims.math.ca/>, 2017.
- [2] D. A. Lind and B. Marcus, *An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding*. Cambridge University Press, 1995. [Online]. Available: <http://books.google.cl/books?id=qSkNs3jr-DIC>
- [3] G. A. Hedlund, “Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system,” *Mathematical systems theory*, vol. 3, no. 4, pp. 320–375, 1969. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/BF01691062>
- [4] M. Sipser, *Introduction to the Theory of Computation*. Thomson Course Technology, 2006. [Online]. Available: <http://books.google.cl/books?id=VJ1mQgAACAAJ>
- [5] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer Science & Business Media, 2013, vol. 319.
- [6] N. Aubrun and N. Bitar, “Self-avoiding walks on cayley graphs through the lens of symbolic dynamics,” 2024.
- [7] D. B. Epstein, *Word Processing in Groups*. A K Peters/CRC Press, Nov. 1992. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1201/9781439865699>